

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Neamț
Subiecte
03.02.2024
Clasa a VIII-a

Subiectul 1

Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| \leq a\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{3n+4}{2n+1} \in \mathbb{Z}, \text{ unde } n \in \mathbb{Z}\right\}$.

- a) Determinați elementele mulțimii B.
- b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $A \cap B$ are exact două elemente.

Subiectul 2

Fie numerele reale x și y care verifică relația $5 \cdot x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x + 2 \leq 0$.

Demonstrați că cea mai mare valoare a expresiei $x - \frac{1}{3} \cdot y$ este mai mică decât $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Subiectul 3

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub și E simetricul lui D față de D' . Se notează cu T și U intersecțiile dreptelor EA' și EC' cu planul (ABC). Se cer:

- a) Demonstrați că T, B și U sunt coliniare;
- b) Demonstrați că T, O și C' sunt coliniare, unde O este centrul feței $ABB'A'$;
- c) Demonstrați că intersecția planelor $(EA'B)$ și (ADC') este dreapta TC' ;
- d) Determinați unghiul dreptelor TC' și AD' .

Subiectul 4

Fie ABCD un patrulater convex cu $AD = BC = 20\sqrt{3} \text{ cm}$, $DB = 10(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}$, $m(\widehat{ADB}) = 60^\circ$, $m(\widehat{DBC}) = 30^\circ$. Se îndoaie foaia de hârtie după diagonala (BD) până când planele triunghiurilor ABD și CBD devin perpendiculare. Notăm cu P noua poziție a punctului C. Să se calculeze tangenta unghiului diedru dintre planele (ADP) și (ABD).

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se evaluează cu note de la 0 la 7 puncte.

Punctajul maxim este de 28 de puncte.

Timp de lucru: 3 ore.