



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
17.02.2024
Clasa a XI-a

Subiectul 1

Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(A) = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}$.

- a) Calculați: $\det(A^2)$, $\det(2024A)$, $\det(k^2 I_2)$.
b) Arătați că $\det(A^2 + 2024A + k^2 I_2)$ este un pătrat perfect.

Subiectul 2

Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Subiectul 3

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit recurent prin $x_0 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

Subiectul 4

Determinați numerele reale $a, b \in \mathbb{R}$ știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + 5}) = -1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.