

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-17.02.2024
Clasa a V-a
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Pentru orice soluție corectă, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .

Subiectul 1

Aflați numerele naturale \overline{ab} , $a \neq 0$, $b \neq 0$, cu proprietatea că \overline{ab} , prin împărțire la 3, dă câtul n și restul 0, iar \overline{ba} , prin împărțire la 3, dă câtul $n+3$, unde n este un număr natural.

(Gazeta matematică nr 11/2023)

Soluție:

$\overline{ab} = 3n, \overline{ba} = 3(n+3) + R, R = 0, 1 \text{ sau } 2$	Punctaj
$10a + b = 3n; 10b + a = 3n + 3 + R;$	1p
$\overline{ab} < \overline{ba}$, deci $a < b$; scădem cele două relații și rezultă: $9(b - a - 1) = R$	1p
Singura soluție este $R = 0$ și $b - a - 1 = 0$	1p
$b = a + 1; 10a + a + 1 = 3n; 11a = 3n - 1$	1p
Soluțiile sunt:	
$a = 1, n = 4, b = 2 \Rightarrow \overline{ab} = 12$	2p
$a = 4, n = 15, b = 5 \Rightarrow \overline{ab} = 45$	
$a = 7, n = 26, b = 8 \Rightarrow \overline{ab} = 78$	

Subiectul 2

Arătați că numărul $N = 13^{2024}$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

Soluție:

$13^{2024} = 13^2 \cdot 13^{2022}$	3p
$= 169 \cdot 13^{2022} = (25 + 144) \cdot 13^{2022}$	2p
$= (5^2 + 12^2) \cdot 13^{2022} = (5 \cdot 13^{1011})^2 + (12 \cdot 13^{1011})^2$	2p

Subiectul 3

Fie numărul $N = 2^{13} + 2^{23} + 2^{33} + 2^{43} + 2^{53} + \dots + 2^{2003}$. Calculați ultimele 3 cifre ale numărului N.

Soluție:

$N = 2^{13}(1 + 2^{10}) + 2^{33}(1 + 2^{10}) + \dots + 2^{1993}(1 + 2^{10})$	2p
$N = 2^{13}1025(1 + 1024^2 + 1024^4 + \dots + 1024^{198})$	1p
Se notează toată paranteza cu A $N = 2^{13}1025 A = 2^{13}5^2 41A \Rightarrow$ ultimele două cifre ale numărului A sunt 00	2p
$198:2=99$, ultima cifră a lui 1024^{2n} este 6, deci este 6 de 99 de ori, $U(A)=4+1=5$ $5 \cdot 2=10$, am luat un 2 din 2^{13} , deci N mai are un 0 la final, ultimele 3 cifre ale numărului N sunt 000	2p

Subiectul 4.

Un grădinar împarte o grădină de flori în 3 bucăți diferite, fiecare dintre ele fiind plantată doar cu una dintre speciile de flori: narcise, lalele, trandafiri.

Începând cu anul 2023, grădinarul se hotărăște ca pe fiecare dintre cele trei bucăți să fie altă specie de flori în 3 ani consecutivi.

- Care este următorul an în care ordinea florilor este aceeași ca în anul 2023?
- Se poate răspunde care este ordinea florilor în anul 2038? Justificați răspunsul.
- Dacă în anul 2023 ordinea florilor a fost narcise, lalele, trandafiri, indicați o posibilă ordine a florilor în anul 2045.

Soluție:

a) Presupunem că în anul 2023 ordinea este a,b,c În anul 2024 ordinea este b,c,a sau c,a,b În anul 2025 ordinea este c,a,b, sau b,c,a În anul 2026 ordinea va fi a,b,c	1p 1p 1p
b) din punctul a) se observă că din 3 în 3 ani ordinea plantelor se repetă deoarece $2038=2023+5 \times 3$ ne rezultă că vom avea aceeași ordine ca în 2023	1p 1p
c) deoarece $2045=2023+7 \times 3+1$ înseamnă altă ordine a culturilor decât în 2023, adică lalele, trandafiri, narcise sau trandafiri, narcise, lalele	1p 1p