

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**Etapa Locală****Maramureș – 10 februarie 2024****Clasa a XII- a****Secțiunea H1****Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

1. Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încât $X^2 - 4X + 13I_2 = O_2$,

unde $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ considerăm legea de compoziție $*$ definită prin $a * b = c \Leftrightarrow c$ este restul împărțirii la 5 al numărului a^b . Realizați tabla operației și studiați proprietățile legii de compoziție.

3. Se consideră integralele definite

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 \cos x + 3 \sin x} dx \quad \text{și} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 \cos x + 3 \sin x} dx.$$

a) Calculați $3I - 2J$.

b) Determinați I și J .

4. Consumul de apă al unei uzine industriale pe durata unei zile (adică 24 de ore) este modelat de o funcție $C: [0, 24] \rightarrow \mathbb{R}$, $C(t) = \int_0^t (x^2 + 1)e^x dx$, unde $C(t)$ reprezintă consumul în intervalul $[0, t]$, exprimat în metri cubi.

a) Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$ este o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

b) Arătați că uzina industrială are, în primele 2 ore ale zilei, un consum mai mic de 19 metri cubi (considerăm $e \approx 2,7$).

Notă:**Toate subiectele sunt obligatorii.****Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.****Timp de lucru – 3 ore**