

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapă Locală
Maramureș – 10 februarie 2024
Clasa a XI- a
Secțiunea H1

Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3x-2 & 2x-3 \\ 3x-1 & 2x-3 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbf{R}$.

a) Verificați egalitatea $A^2 = 5(x-1) \cdot A + (2x-3) \cdot I_2$.

b) Pentru $x = 1$, calculați suma $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{99}$.

c) Pentru $x = \frac{3}{2}$ calculați A^n , unde $n \in \mathbf{N}^*$.

2. Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & y & 2 \\ x^2-6 & y^2+4 & 10 \end{vmatrix}$, unde $x, y \in \mathbf{R}$.

a) Demonstrați că $D(x, y) = -(x-6)(y-4)(x-y+2)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

b) Rezolvați ecuația $D(2^x, 4^x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Calculați următoarele limite:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x + 3^x - 5}{4^x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x}) + \ln(\sqrt{1+2^3 \cdot x}) + \ln(\sqrt{1+3^3 \cdot x}) + \dots + \ln(\sqrt{1+n^3 \cdot x})}{x}, n \in \mathbf{N}^*$.

4. Se consideră funcția $f: \left[-\frac{1}{9}, +\infty\right) \rightarrow \mathbf{R}$, cu $f(x) = a\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+1} + b\sqrt{9x+1}$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$. Determinați o relație între numerele reale a și b , astfel încât funcția f să admită asimptotă orizontală și în acest caz, determinați ecuația asimptotei orizontale.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru – 3 ore