

74. Országos matematikaolimpia
Körzeti szakasz, 2024. február 10.
IX. osztály

1. feladat

- a) Oldd meg az egész számok halmazán a $|x - 3| + |x - 1| + |x + 1| = 5$ egyenletet!
- b) Határozd meg azokat a $k \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyek esetén a

$$|x - 3| + |x - 1| + |x + 1| = k$$

egyenletnek pontosan egy egész megoldása van.

- 2. feladat.** Igazold, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén a $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ szám osztható 17-tel.

- 3. feladat.** Igazold, hogy bármely $a, b, c > 0$ valós számok esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

a) $\frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}}$

b) $\frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}$

c) $\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$

- 4. feladat.** Az $ABCDEF$ szabályos hatszög AB, BC, DE és EF oldalain legyenek az M, N, P illetve Q pontok úgy, hogy $\frac{BM}{MA} = m, \frac{BN}{NC} = n, \frac{EP}{PD} = p, \frac{EQ}{QF} = q$.

a) Igazold, hogy $\vec{EM} + \vec{BP} = \left(\frac{1}{1+p} - \frac{1}{1+m} \right) \vec{BA}$ és $\vec{EN} + \vec{BQ} = \left(\frac{1}{1+q} - \frac{1}{1+n} \right) \vec{BC}$.

- b) Tudva, hogy $\vec{EM} + \vec{EN} + \vec{BP} + \vec{BQ} = \vec{0}$, igazold, hogy MP, NQ és CF összefutó egyenesek.

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.