

26. Adolf Haimovici Matematikaverseny
Körzeti szakasz, 2024. február 10.
XI. osztály - H2 - Természettudomány

1. feladat. Adott az $f : (0, 4) \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 + x + 4}}{x - 3}, & 0 < x < 3, \\ \frac{-\sin 2(x - 3)}{8(x - 3)}, & 3 < x < 4. \end{cases}$

függvény. Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy az f függvénynek legyen határértéke az $x = 3$ pontban!

2. feladat. Adott az $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix és a $G = \{M(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$ halmaz.

a) Igazold, hogy $M(a) \cdot M(b) \in G$, bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén!

b) Felhasználva esetleg az $a + b + 3ab = 3 \left(a + \frac{1}{3}\right) \left(b + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}$ azonosságot, határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy $(M(a))^{2023} = M\left(-\frac{2}{3}\right)$.

3. feladat. Adott az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ függvény, ahol D a maximális értelmezési tartomány.

a) Határozd meg a D halmazt!

b) Határozd meg a függvény aszimptotáit!

4. feladat. Egy ökológus egy ritka növényfaj eloszlását tanulmányozza egy védett övezetben. Megfigyelte, hogy ezek a növények elsősorban egy olyan háromszög alakú területen növekednek amelyet három folyó határol azon a területen. A tudós ki akarja számítani ennek a háromszögnek a területét ahhoz, hogy környezetvédő intézkedéseket vezessen be. Tudja, hogy a folyók útvonalát az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = \frac{1}{m}x + m$ függvény grafikus képe határozza meg, ahol m egy pozitív racionális paraméter. Legyen G_m az f_m függvény grafikonja. Segíts az ökológusnak!

a) Ha G_p și G_q két folyó útvonalát írja le ($p, q \in \mathbb{Q}_+^*$), határozd meg a két folyó útvonalának metszéspontját!

b) Számítsd ki a három folyó G_a, G_b és G_c grafikonja által határolt háromszög területét, ha a, b és c egymásutáni természetes számok!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.