

**A 74-a Olimpiadă Națională de Matematică****Etapa zonală, 10 februarie 2024****Clasa a V-a****Soluții și bareme**

Problema 1. Fie numărul $a = (3^{21} - 2 \cdot 3^{20}) \cdot 25^{17} \cdot 5 : 125^5$ și numărul b , care este egal cu jumătatea puterii 2^{34} . Care este numărul mai mare dintre a și b ?

*Váncsa Dóra, Sfântu Gheorghe***Soluție**

$$\begin{aligned}
 3^{21} - 2 \cdot 3^{20} &= 3^{20} \cdot (3 - 2) && 1\text{p} \\
 25^{17} \cdot 5 &= (5^2)^{17} \cdot 5 = 5^{35} && 1\text{p} \\
 125^5 &= (5^3)^5 = 5^{15} && 1\text{p} \\
 a &= 3^{20} \cdot 5^{35} : 5^{15} = 3^{20} \cdot 5^{20} = 15^{20} && 1\text{p} \\
 b &= 2^{34} : 2 = 2^{81} : 2 = 2^{80} = (2^4)^{20} = 16^{20} && 2\text{p} \\
 a < b, &\text{ deci } b \text{ este numărul mai mare.} && 1\text{p}
 \end{aligned}$$

Problema 2. Pe o balanță cu două talere 4 mere cântăresc cât 5 pere, 3 pere cântăresc cât 7 piersici, iar 5 piersici cât 8 nuci. Dacă așezăm 3 mere pe unul dintre talere, atunci câte nuci trebuie să așezăm pe celălalt taler ca balanța să fie în echilibru?

*Bencző Piroska, Joseni***Soluție**

Dacă calculează corect multiplii maselor așezate pe balanța în echilibru pentru una dintre cele trei cazuri. 1p

$$\begin{aligned}
 4 \text{ mere} \dots 5 \text{ pere} &\Rightarrow 12 \text{ mere} \dots 15 \text{ pere} && 1\text{p} \\
 3 \text{ pere} \dots 7 \text{ piersici} &\Rightarrow 15 \text{ pere} \dots 35 \text{ piersici} && 1\text{p} \\
 5 \text{ piersici} \dots 8 \text{ nuci} &\Rightarrow 35 \text{ piersici} \dots 56 \text{ nuci} && 1\text{p} \\
 12 \text{ mere} \dots 56 \text{ nuci} &\Rightarrow 3 \text{ mere} \dots 14 \text{ nuci} && 2\text{p} \\
 14 \text{ nuci trebuie să așezăm pe celălalt taler ca balanța să fie în echilibru.} &&& 1\text{p}
 \end{aligned}$$

Problema 3. Determinați cifrele a, b și c pentru care următoarea relație este adevărată: $3 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot \overline{bc} + c = 2024$.

*GM: 9/S:E23.209***Soluția 1**

$$\begin{aligned}
 3 \cdot \overline{abc} + 2 \cdot \overline{bc} + c &= 300 \cdot a + 50 \cdot b + 6 \cdot c = 2024 && 2\text{p} \\
 0 \leq 50b \leq 450, 0 \leq 6c \leq 54 &\Rightarrow 1520 \leq 300a \leq 2024 && 1\text{p} \\
 \text{Deci } a &= 6. && 1\text{p} \\
 50 \cdot b + 6c &= 224 \text{ și } 0 \leq 6c \leq 54 \Rightarrow 170 \leq 50b \leq 224 \Rightarrow b = 4. && 2\text{p} \\
 c &= 4. && 1\text{p}
 \end{aligned}$$

Soluția 2

$$\begin{aligned}
 3\overline{abc} + 2\overline{bc} + c &= 2024 \Rightarrow 300a + 5\overline{bc} + c = 2024 \\
 u(300a) &= 0, u(5\overline{bc}) = 0 \text{ sau } u(5\overline{bc}) = 5 && 1\text{p} \\
 \text{Cazul 1: Dacă } u(5\overline{bc}) &= 0 \Rightarrow u(300a + 5\overline{bc} + c) = u(2024) \Rightarrow c = 4. && 1\text{p} \\
 300a + 50b &= 2000 \Rightarrow 6a + b = 40 \Rightarrow a < 7 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 4 && 1\text{p} \\
 \text{Pentru } a < 6 &\text{ nu ne convine. Verificare pentru } \overline{abc} = 644. && 1\text{p}
 \end{aligned}$$

Cazul 2: Dacă $u(5\overline{bc}) = 5 \Rightarrow u(300a + 5\overline{bc} + c) = u(5 + c) = u(2024) \Rightarrow c = 9$ **1p**
 $300a + 50b = 1970 \Rightarrow 30a + 5b = 197 \Rightarrow a < 6 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 5b = 47$ nu ne convine. **1p**
 Pentru $a < 5$ nu ne convine. Răspuns: $a = 6, b = 4, c = 4$ **1p**

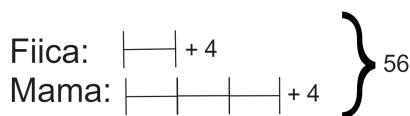
Problema 4. Suma dintre vârsta unei mame și fiicei sale este de 56 ani. În urmă cu patru ani vârsta mamei era de trei ori mai mare decât vârsta fiicei sale.

- Ce vârstă are mama și fiica?
- Peste câți ani va fi vârsta mamei dublul vârstei fiicei sale?
- Determină al câtelea an bisect va fi trăit de către mamă la aniversarea zilei sale de naștere de 100 ani, dacă acum scriem anul 2024. (Un an este bisect dacă este multiplu de 4 și nu se divide cu 100).

Șuiu Éva, Sfântu Gheorghe

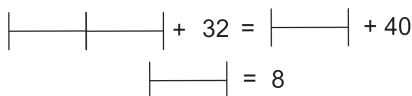
Soluție

- Realizarea figurii **1p**



Cu patru ani în urmă fiica avea $(56 - 8) : 4 = 48 : 4 = 12$ ani. **1p**
 Acum fiica are $12 + 4 = 16$ ani iar mama are $56 - 16 = 40$ ani. **1p**

b)



Răspuns: Peste opt ani. **2p**

c) $2024 - 40 = 1984$ este anul în care s-a născut mama, un an bisect, deoarece $4 \mid 1984$, dar 1984 nu se divide cu 100.

Anul în care împlinește cei 100 de ani este $1984 + 100 = 2084$.

Anii bisecți în timpul vieții sale până la aniversare de 100 ani sunt:

1984, 1988, 1992, 1996, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024, 2028, 2032, 2036, 2040,

2044, 2048, 2052, 2056, 2060, 2064, 2068, 2072, 2076, 2080, 2084. **1p**

La aniversarea zilei sale de naștere de 100 ani mama va trăi al 25-lea an bisect. **1p**