

**Al 26-lea Concurs Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**  
**Etapă zonală, 10 februarie 2024**  
**Clasa a XI-a - H2 - Științele naturii**

**Problema 1.** Fie funcția  $f : (0, 4) \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 + x + 4}}{x - 3}, & 0 < x < 3, \\ -\frac{\sin 2(x - 3)}{8(x - 3)}, & 3 < x < 4. \end{cases}$

Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcția să aibă limită în  $x = 3$ .

**Problema 2.** Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{M(a) = I_2 + aA | a \in \mathbb{R}\}$ .

- a) Arătați că  $M(a) \cdot M(b) \in G$ , pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- b) Utilizând, eventual, identitatea  $a + b + 3ab = 3 \left(a + \frac{1}{3}\right) \left(b + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}$ , determinați  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $(M(a))^{2023} = M(-\frac{2}{3})$ .

**Problema 3.** Fie funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x| \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ , unde  $D$  este domeniul maxim de definiție.

- a) Determinați  $D$ .
- b) Determinați asimptotele funcției  $f$ .

**Problema 4.** Un ecolog studiază distribuția unei specii rare de plante într-o zonă protejată. El observă că aceste plante cresc în principal într-un triunghi format de trei râuri care trec prin acea zonă. Ecologul dorește să determine aria suprafeței ocupate de această specie de plante pentru a planifica măsuri de conservare. Acesta știe că un râu are traiectoria dată de o funcție de forma  $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = \frac{1}{m}x + m$ , unde  $m$  este un parametru rațional pozitiv, iar  $G_m$  este graficul funcției  $f_m$ . Ajută-l pe ecolog!

- a) Dacă  $G_p$  și  $G_q$  reprezintă graficele a două râuri ( $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$ ), află punctul  $M$  de intersecție a celor două râuri.
- b) Află aria triunghiului format de graficele celor trei râuri  $G_a, G_b$  și  $G_c$ , știind că  $a, b$  și  $c$  sunt trei numere naturale consecutive.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.*