

## 26. Adolf Haimovici Alkalmazott Matematikaverseny

Körzeti szakasz, 2024. február 10.

### XII. osztály - H2 - Természettudomány

**1. feladat.** A  $G = (2, +\infty)$  halmazon értelmezzük az  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20}$  műveletet.

a) Igazold, hogy  $x * y = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4}$ , bármely  $x, y \in G$  esetén!

b) Tudva, hogy a  $(G, *)$  csoport, igazold hogy az

$$f : (0, +\infty) \rightarrow (2, +\infty), f(x) = \sqrt{x + 4}$$

függvény csoportizomorfizmus az  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$  és a  $(G, *)$  csoportok között!

c) Oldd meg a  $G$  halmazon az  $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2024\text{-szer}} = \sqrt{5}$  egyenletet!

**2. feladat.** Adott az  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{\arctg x}{1 + x^2}$  és az  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{x^4 \cdot \arctg x}{1 + x^2}$  függvény.

a) Határozd meg az  $f_1$  függvénynek azt az  $F_1$  primitív függvényét, amelyre  $F_1(1) = 0$ .

b) Számítsd ki:  $\int f_2(x) dx$ .

**3. feladat.** Legyen:

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

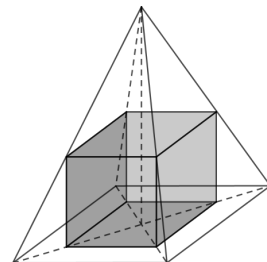
a) Igazold, hogy  $A(x) \cdot A(y) = A\left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\right)$  bármely  $A(x), A(y) \in G$  esetén!

b) Igazold, hogy  $(G, \cdot)$  Abel-féle csoport!

c) Számítsd ki  $A^n(x)$ -t,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**4. feladat.**

Írjunk az 1 m oldalélű kocka köré minimális térfogatú szabályos négyoldalú gúlát úgy, hogy az alapja a kocka egyik lapjának síkjában legyen és a kocka többi négy csúcsa a gúla oldalélein helyezkedjen el. Mekkora a magassága ennek a gúlának?



Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.