



A 74-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapă zonală, 10 februarie 2024
Clasa a VI-a
Soluții și bareme

Problema 1. Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

- a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
- b) $A \cap B = \{4; 5\}$
- c) $\text{card}A = \text{card}B$
- d) $6 \in A \setminus B$
- e) suma elementelor mulțimii A este cel mai mic posibil.

Koók László Attila, Gheorgheni

Soluție

Din condiția b) rezultă că $4 \in A$, $5 \in A$ și $4 \in B$, $5 \in B$ **1p**

Din condiția d) rezultă că $6 \in A$ și $6 \notin B$ **1p**

Din condițiile a) b) și c) rezultă $\text{card}A = \text{card}B = 5$ **1p**

Deci $\text{card}A \setminus B = 3$, $6 \in A \setminus B$, astfel din condiția e) rezultă că $1 \in A$ și $2 \in A$ **2p**

Deci $7 \in B$ și $8 \in B$ **1p**

Deci $A = \{1; 2; 4; 5; 6\}$ și $B = \{3; 4; 5; 7; 8\}$ **1p**

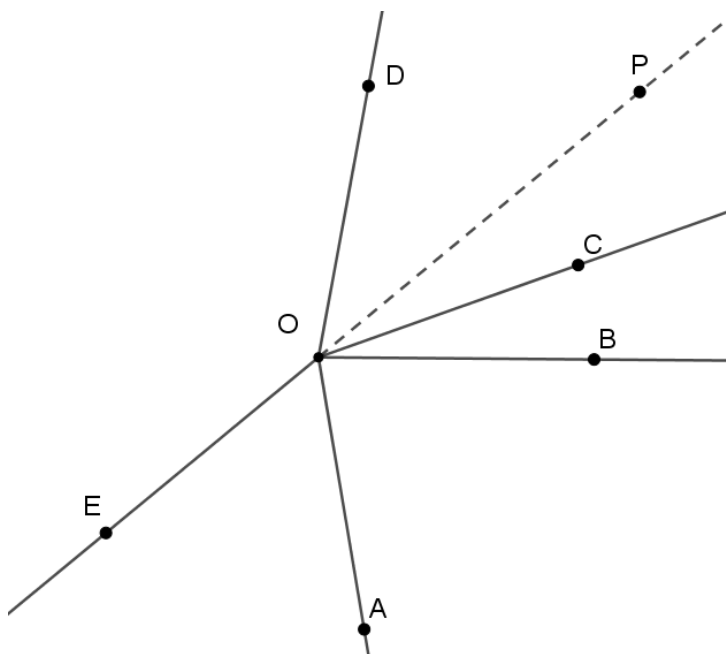
Observație: Dacă determină mulțimile A și B fără să justifice, folosind doar diagrama Venn-Euler. **5p**

Problema 2. În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA , astfel încât $\angle BOC = 20^\circ$, $\angle AOC = \frac{5}{4} \cdot \angle AOB$, $\angle BOD = \angle AOB$ și măsura unghiului DOE este cu 40° mai mare decât suplementul unghiului BOD .

a) Calculați măsurile unghiurilor DOC și AOE .

b) Fie semidreapta OP bisectoarea unghiului BOD . Arătați că punctele P, O și E sunt coliniare!

Csikai Ildikó, Miercurea Ciuc



Soluție a) Desen. 1p

$$\angle AOC = \frac{5}{4} \cdot \angle AOB \Rightarrow \angle BOC = \frac{1}{4} \cdot \angle AOB = 20^\circ \Rightarrow \angle AOB = 80^\circ \Rightarrow \angle AOC = 100^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\angle BOD = \angle AOB = 80^\circ \Rightarrow \angle COD = \angle BOD - \angle BOC = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Unghiul suplementar al } \angle BOD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \Rightarrow \angle DOE = 100^\circ + 40^\circ = 140^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\angle AOE = 360^\circ - (80^\circ + 20^\circ + 60^\circ + 140^\circ) = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$$

b) **Soluție 1.** $\angle BOP = \frac{\angle BOD}{2} = 40^\circ \dots\dots\dots 1p$

$$\angle POE = \angle POB + \angle BOA + \angle AOE = 40^\circ + 80^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \text{punctele } P, O \text{ și } E \text{ sunt coliniare.}$$

..... 1p

Soluție 2.

$$\angle POD = \frac{\angle BOD}{2} = 40^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\angle POE = \angle POD + \angle DOE = 40^\circ + 140^\circ = 180^\circ \Rightarrow \text{punctele } P, O \text{ și } E \text{ sunt coliniare.} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3.

a) Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor 253 și 345.

b) Determinați numerele prime a, b, p , știind că $23a^2 + 253b - 103p = 2024$.

Voloncs Mária Terézia, Târgu Secuiesc

Soluție

a) $253 = 23 \cdot 11$ și $345 = 23 \cdot 5 \cdot 3$ **1p**

Deci c.m.m.d.c. $(253, 345) = 23$ **1p**

Soluție 1.

b) $\underbrace{23a^2}_{\div 23} + \underbrace{253b}_{\div 23} - 103p = \underbrace{2024}_{\div 23} \Rightarrow 23|103p \Rightarrow 23|p$ și p este un număr prim $\Rightarrow p = 23$ **1p**

$23a^2 + 253b - 103p = 2024 \Rightarrow 23a^2 + 253b - 103 \cdot 23 = 2024 \Rightarrow a^2 + 11b = 191$ **1p**

11 și 191 este impar \Rightarrow unul dintre numerele a și b trebuie să fie par. **1p**

I. Dacă $a = 2 \Rightarrow 4 + 11b = 191 \Rightarrow b = 17$ **1p**

II. Dacă $b = 2 \Rightarrow a^2 + 22 = 191 \Rightarrow a = 13$ **1p**

Soluție 2.

b) $\underbrace{23a^2}_{\div 23} + \underbrace{253b}_{\div 23} - 103p = \underbrace{2024}_{\div 23} \Rightarrow 23|103p \Rightarrow 23|p$ și p este un număr prim $\Rightarrow p = 23$ **1p**

$23a^2 + 253b - 103p = 2024 \Rightarrow 23a^2 + 253b - 103 \cdot 23 = 2024 \Rightarrow a^2 + 11b = 191$ **1p**

I. Dacă $a = 2 \Rightarrow 4 + 11b = 191 \Rightarrow b = 17$.

II. Dacă $a = 3 \Rightarrow 9 + 11b = 191 \Rightarrow b = \frac{182}{11} \notin \mathbb{N}$

III. Dacă $a = 5 \Rightarrow 25 + 11b = 191 \Rightarrow b = \frac{166}{11} \notin \mathbb{N}$

IV. Dacă $a = 7 \Rightarrow 49 + 11b = 191 \Rightarrow b = \frac{142}{11} \notin \mathbb{N}$

V. Dacă $a = 11 \Rightarrow 121 + 11b = 191 \Rightarrow b = \frac{70}{11} \notin \mathbb{N}$

VI. Dacă $a = 13 \Rightarrow 169 + 11b = 191 \Rightarrow b = 2$

Dacă $a \geq 14 \Rightarrow a^2 \geq 196$ deci nu mai sunt soluții. **3p**

Problema 4. Fie numerele naturale nenule a, b, c , care verifică relația $\frac{a}{12} = \frac{13}{b} = \frac{c}{13}$. Stabiliți ce valori poate lua produsul $a \cdot b \cdot c$.

Gazeta matematică 11/S:E23.295

Soluție 1.

Din $\frac{a}{12} = \frac{13}{b} \Rightarrow ab = 12 \cdot 13$ **1p**

$$\text{Din } \frac{13}{b} = \frac{c}{13} \Rightarrow bc = 13 \cdot 13 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Din } ab = 12 \cdot 13 \text{ și } bc = 13 \cdot 13 \Rightarrow ab^2c = 12 \cdot 13^3 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{I. } acb^2 = (12 \cdot 13) \cdot 13^2 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Deci } b = 13 \Rightarrow acb = 12 \cdot 13^2 = 2028. \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{II. } acb^2 = (12 \cdot 13^3) \cdot 1^2 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Deci } b = 1 \Rightarrow acb = 12 \cdot 13^3 \cdot 1 = 26364. \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Soluție 2.

$$\text{Din } \frac{a}{12} = \frac{13}{b} \Rightarrow ab = 12 \cdot 13. \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Din } \frac{13}{b} = \frac{c}{13} \Rightarrow bc = 13 \cdot 13 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Deci } b|ab \text{ și } b|bc. \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{I. Dacă } b = 13 \Rightarrow c = 13 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow abc = 12 \cdot 13^2 = 2028. \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$\text{II. Dacă } b = 1 \Rightarrow c = 13^2 = 169 \Rightarrow a = 12 \cdot 13 \Rightarrow abc = 13^3 \cdot 12 = 26364. \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$