

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a XI-a

secțiunea H2 -filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

- Arătați că $A^2 = 3A - 2I_2$.
- Calculați $B^4 - 15B$.
- Demonstrați că $A^n - B^n = (2^n - 1)(A - B), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

- Prin calcul direct sau cu relația lui Cayley-Hamilton;.....1p
- Analog a), se obține $B^2 = 3B - 2I_2$ și apoi, prin calcule $B^4 = 15B - 14I_2$ deci
 $B^4 - 15B = -14I_2 = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$;.....2p
- Prin inducție se demonstrează $p(n): A^n - B^n = (2^n - 1)(A - B), \forall n \in \mathbb{N}^*$
 $p(1): A - B = (2 - 1)(A - B)$, adevărat.....1p
Presupunem că $p(k): A^k - B^k = (2^k - 1)(A - B)$ adevărat, $\forall k \geq 2$ 1p
Demonstrăm $p(k+1): A^{k+1} - B^{k+1} = A^{k-1} \cdot A^2 - B^{k-1} \cdot B^2 = A^{k-1} \cdot (3A - 2I_2) - B^{k-1} \cdot (3B - 2I_2) =$
 $= 3(2^k - 1)(A - B) - 2(2^{k-1} - 1)(A - B) = (2^{k+1} - 1)(A - B)$ deci $p(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 2p

SUBIECTUL 2

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-1}{\sqrt[4]{3x^4-2}-1}, & x < -1 \\ \frac{\ln(1+\arctg(x+1))}{x^2+4x+3}, & x > -1 \end{cases}$

- Demonstrați că funcția f nu are limită în -1 .
- Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Soluție: Vom calcula limitele laterale în punctul de tranzit $x = -1$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-1}{\sqrt[4]{3x^4-2}-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{(1+(2x^2-2))^{\frac{1}{3}}-1}{(1+(3x^4-3))^{\frac{1}{4}}-1} \cdot \frac{2x^2-2}{3x^4-3} = \frac{1/3}{1/4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}, \text{ folosind limita fundamentală}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ u(x) \rightarrow 0}} \frac{(1+u(x))^r}{u(x)} = r. \text{ Se poate rezolva și prin raționalizarea expresiilor cu radicali.2p}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{\ln(1+\arctg(x+1))}{x^2+4x+3} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{\ln(1+\arctg(x+1))}{\arctg(x+1)} \cdot \frac{\arctg(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2+4x+3}, \text{ care la final este egală cu } \frac{1}{2}, \text{ folosind}$$

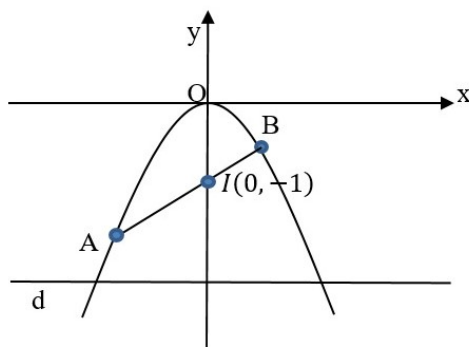
$$\text{limitele fundamentale } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ u(x) \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1, \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ u(x) \rightarrow 0}} \frac{\arctg u(x)}{u(x)} = 1, \text{ precum și descompunerea în factori}$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Cele două limite laterale sunt diferite, deci nu există } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} \left(\sqrt[3]{2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} \right)}{-x \left(\sqrt[4]{3 - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x}} \right)} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0 \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 3



În reperul cartezian xOy, suprafața cuprinsă între graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$ și dreapta d, reprezintă un lac. Punctul O reprezintă debarcaderul, iar în punctul $I(0, -1)$ este o insulă. Un vaporăș face trasee de agrement pe lac. Punctele A și B reprezintă două stații de pe malul lacului, poziționate pe aceeași dreaptă cu insula I. Într-un traseu pe lac vaporășul a avut următoarele stații:

debarcader \rightarrow stația A \rightarrow insula I \rightarrow stația B \rightarrow debarcader.

Drumul între două stații consecutive a fost parcurs în linie dreaptă.

Demonstrați că reprezentarea geometrică în reperul cartezian a traseului vaporășului este un triunghi dreptunghic.

Soluție: Traseul vaporășului în reperul cartezian este reprezentat prin triunghiul OAB.

Punctele $A, B \in G_f$, deci au coordonate de forma $A(a, -a^2), B(b, -b^2) \dots\dots\dots 1p$

$$A, I, B \text{ sunt coliniare} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ a & -a^2 & 1 \\ b & -b^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-b)(ab+1) = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$a \neq b \Rightarrow ab + 1 = 0. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Calculăm } OA^2 + OB^2 = a^2 + a^4 + b^2 + b^4, \text{ iar } AB^2 = (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow AB^2 = a^2 + a^4 + b^2 + b^4 - 2ab(ab+1) = a^2 + a^4 + b^2 + b^4, \text{ deci } OA^2 + OB^2 = AB^2,$$

iar triunghiul OAB este dreptunghic. $\dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL 4 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{e^{\frac{2}{x}} - e^2}$

a) Determinați valorile numărului real a pentru care punctul $P\left(a; -\frac{1}{3}\right) \in G_f$.

b) Aflați asimptotele la graficul funcției.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x)$.

Soluție:

$$a) P\left(a; -\frac{1}{3}\right) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\frac{2}{a}} - e^2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2}{\ln(e^2 - 3)} \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \dots\dots\dots 2p$$

b) Se calculează $l_{-\infty}, l_{\infty}, l_s(0), l_d(0), l_s(1), l_d(1)$. Se găsesc $x=1$ asimptotă verticală și $y = \frac{1}{1-e^2}$ asimptotă orizontală la graficul funcției. $\dots\dots\dots 3p$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{\frac{2}{x}} - e^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{-2(1-x)}{x} \cdot \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2e^2} \dots\dots\dots 2p$$