

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a XII-a

secțiunea H1 - filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

Fie $G = \{A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}\}$.

a) Arătați că (G, \cdot) este grup abelian, unde „ \cdot ” este înmulțirea matricelor pătratice de ordinul trei.

b) Calculați simetricul elementului $A(2024)$.

c) Demonstrați că $A^n(x) = A\left(\frac{1-(1-2x)^n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ și calculați $A^{2024}(1)$.

Soluție

a) Obține $A(x) \cdot A(y) = A(x + y - 2xy)$.

Deduce că pentru $x \neq \frac{1}{2}$ și $y \neq \frac{1}{2}$ se obține $x + y - 2xy \neq \frac{1}{2}$ 1p

Stabilește că înmulțirea matricelor din G este asociativă, comutativă 1p

Deduce că elementul neutru este $A(0)$, iar simetricul elementului $A(x)$ este $A(x') = A\left(\frac{x}{2x-1}\right)$, $x \neq \frac{1}{2}$. Finalizează. 2p

b) Stabilește că simetricul elementului $A(2024)$ este $A\left(\frac{2024}{4047}\right)$ 1p

c) Demonstrează prin inducție matematică că $A^n(x) = A\left(\frac{1-(1-2x)^n}{2}\right)$ 1p

Calculează $A^{2024}(1) = A(0)$ 1p

SUBIECTUL 2

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = -5xy + 10x + 10y - 18$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x \circ y = 2 - 5(x - 2)(y - 2)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că dacă $a \circ a = b$ și $b \circ b = a$, atunci $a = b = 2$ sau $a = b = \frac{9}{5}$.

c) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = m \cdot e^x + 2$ verifică relația $f(x + y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție

a) Demonstrează relația 1p

b) $a \circ a = b \Leftrightarrow 2 - 5(a - 2)^2 = b$, $b \circ b = a \Leftrightarrow 2 - 5(b - 2)^2 = a$ 1p

$\Rightarrow a - 2 = -125(a - 2)^4$, 1p

de unde se obține $a = 2 = b$ sau $a - 2 = -\frac{1}{5}$, de unde $a = \frac{9}{5} = b$ 2p

c) $f(x + y) = m \cdot e^{x+y} + 2$, $f(x) \circ f(y) = 2 - 5m^2 e^{x+y}$ 1p

Ținând cont că $m \neq 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{5}$ 1p

SUBIECTUL 3

Medicul de gardă al Spitalului nr.1 din municipiul Constanța a depistat, în prima zi de activitate a anului 2024, un număr de 12 persoane bolnave de viroză respiratorie. Se estimează că numărul V al persoanelor bolnave după n zile va fi dat de ecuația $V'(n) = 2n + 3$ (unde prin $V'(n)$ am notat derivata funcției $V(n)$).

- Să se determine funcția $V(n)$.
- Determinați numărul persoanelor bolnave după 7 zile.
- La câte zile de la prima observație medicul înregistrează 54 bolnavi?

Soluție

- $V(n) = \int (2n + 3)dn = n^2 + 3n + C$ 1p
Dar $V(1) = 12 \Rightarrow C = 8$.Finalizare 1p
- $V(7) = 78$, deci după 7 zile vor fi 78 persoane bolnave 2p
- Rezolvarea, în \mathbb{N} , a ecuației $n^2 + 3n = 54$, cu soluția $n = 6$ 3p

SUBIECTUL 4

- Determinați primitiva F a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{2024}$, cu proprietatea $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2024} + x + 1$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa.

Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$.

Soluție

- $F(x) = \frac{1}{2024} \int \cos x dx = \frac{1}{2024} \sin x + C$ 2p
 $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2024} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2024}$. Se obține $F(x) = \frac{1}{2024} (\sin x - 1)$ 2p
- $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f \Rightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ 1p
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = F'(1) = f(1) = 3$ 2p