

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală – Constanța, 3.02.2024
Clasa a IX-a

secțiunea H2 -filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Demonstrați că $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, pentru orice $a, b \in (0, +\infty)$.

b) Demonstrați că $3\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) \geq 4 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.

Soluție

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b), \forall a, b \in (0, +\infty)$ 1p

$\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab$ 1p; Se obține $(a - b)^2 \geq 0$ 1p

b) Pentru $a = \frac{x}{y}$ și $b = \frac{y}{x}$, se obține $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} \geq \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$,

adică $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 2p

Se înmulțește inegalitatea cu 3 și avem $3\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) \geq 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 1p

Dar, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. Atunci, $3\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) \geq 2 \cdot 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 1p

SUBIECTUL 2

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|x + 1| \cdot \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] = -\frac{1}{2}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

b) Calculați suma $S = \left\{ \frac{2023}{2024} \right\} + \left\{ 2 \cdot \frac{2023}{2024} \right\} + \left\{ 3 \cdot \frac{2023}{2024} \right\} + \dots + \left\{ 2023 \cdot \frac{2023}{2024} \right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

Soluție

a) $\left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] = \frac{-1}{2 \cdot |x + 1|}$ și cum $\frac{2x}{x^2 + 1} \in [-1, 1] \Rightarrow \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] \in \{-1, 0, 1\}$ 2p

$2 \cdot |x + 1| = 1 \Rightarrow |x + 1| = \frac{1}{2}$, ceea ce înseamnă că $x \in \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$ 1p

b) $S = \left\{ 1 - \frac{1}{2024} \right\} + \left\{ 2 - \frac{2}{2024} \right\} + \left\{ 3 - \frac{3}{2024} \right\} + \dots + \left\{ 2023 - \frac{2023}{2024} \right\} =$
 $= \left\{ -\frac{1}{2024} \right\} + \left\{ -\frac{2}{2024} \right\} + \left\{ -\frac{3}{2024} \right\} + \dots + \left\{ -\frac{2023}{2024} \right\}$ 2p

$$S = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2023\text{ori}} - \frac{1}{2024} - \frac{2}{2024} - \dots - \frac{2023}{2024} \dots\dots\dots 1p$$

$$S = 2023 - \frac{1+2+3+\dots+2023}{2024} = 2023 - \frac{2023}{2} = \frac{2023}{2} \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 3

În paralelogramul $ABCD$ se consideră punctul O intersecția diagonalelor. Fie $P \in (BD)$, $Q \in (DC)$, respectiv $R \in (AB)$, astfel încât $\frac{BP}{PD} = 4$, $\frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3}$ și $\frac{AR}{RB} = 3$.

a) Arătați că $\overrightarrow{OQ} = \frac{5}{16}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{16}\overrightarrow{BD}$.

b) Demonstrați că vectorii \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{OQ} și \overrightarrow{CR} sunt coliniari.

Soluție

a) $\frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1+\frac{5}{3}}\overrightarrow{OD} + \frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}}\overrightarrow{OC} \dots\dots\dots 2p$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{5}{16}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{16}\overrightarrow{BD} \dots\dots\dots 1p$$

b) $\frac{DP}{PB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}}\overrightarrow{AD} + \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 1p$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{5}{16}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{16}\overrightarrow{BD} = \frac{5}{16}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{3}{16}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{AR}{RB} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{CR} = \frac{1}{1+3}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{1+3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{8}{5}\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CR}, \text{ deci vectorii } \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{OQ} \text{ și } \overrightarrow{CR} \text{ sunt coliniari} \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4

Se consideră un triunghi echilateral de arie A . Se elimină triunghiul determinat de mijloacele laturilor triunghiului. La următorul pas se aplică același procedeu pentru fiecare din triunghiurile rămase. Notăm cu S_n aria suprafeței rămase după n pași.

a) Determinați numărul triunghiurilor eliminate după 4 pași.

b) Calculați S_1, S_2, S_3 , în funcție de aria A a triunghiului inițial.

c) Calculați S_{2024} .

Soluție

a) Calcul direct: $1+3+3^2+3^3=40$ triunghiuri..... 1p

b) $A_1 = \frac{1}{4}A$, unde A_1 reprezintă aria triunghiului eliminat la pasul 1, $S_1 = A - A_1 = \frac{3}{4} \cdot A \dots\dots\dots 1p$

$$A_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot A, \text{ unde } A_2 \text{ reprezintă aria unui triunghi eliminat la pasul 2, } S_2 = S_1 - 3A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A \dots\dots\dots 1p$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot A, S_3 = S_2 - 9 \cdot A_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A - 3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot A = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A \dots\dots\dots 1p$$

c) $S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$, pentru orice $n \geq 1$, demonstrație prin inducție matematică..... 2p

$$S_{2024} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2024} \cdot A \dots\dots\dots 1p$$