

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”**  
**Etapa locală – Constanța, 3.02.2024**

**Clasa a IX-a**

secțiunea H2 -filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

**SUBIECTUL 1**

- a) Demonstrați că  $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ , pentru orice  $a, b \in (0, +\infty)$ .
- b) Demonstrați că  $3\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) \geq 4 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ , pentru orice  $x, y \in (0, +\infty)$ .

**SUBIECTUL 2**

- a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $|x+1| \cdot \left[ \frac{2x}{x^2+1} \right] = -\frac{1}{2}$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .
- b) Calculați suma  $S = \left\{ \frac{2023}{2024} \right\} + \left\{ 2 \cdot \frac{2023}{2024} \right\} + \left\{ 3 \cdot \frac{2023}{2024} \right\} + \dots + \left\{ 2023 \cdot \frac{2023}{2024} \right\}$ , unde  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ .

**SUBIECTUL 3**

În paralelogramul  $ABCD$  se consideră punctul  $O$  intersecția diagonalelor. Fie  $P \in (BD), Q \in (DC)$ , respectiv  $R \in (AB)$ , astfel încât  $\frac{BP}{PD} = 4, \frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3}$  și  $\frac{AR}{RB} = 3$ .

- a) Arătați că  $\overrightarrow{OQ} = \frac{5}{16} \overrightarrow{AC} + \frac{3}{16} \overrightarrow{BD}$ .
- b) Demonstrați că vectorii  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{OQ}$  și  $\overrightarrow{CR}$  sunt coliniari.

**SUBIECTUL 4**

Se consideră un triunghi echilateral de arie  $A$ . Se elimină triunghiul determinat de mijloacele laturilor triunghiului. La următorul pas se aplică același procedeu pentru fiecare din triunghiurile rămase. Notăm cu  $S_n$  aria suprafeței rămase după  $n$  pași.

- a) Determinați numărul triunghiurilor eliminate după 4 pași.
- b) Calculați  $S_1, S_2, S_3$ , în funcție de aria  $A$  a triunghiului inițial.
- c) Calculați  $S_{2024}$ .

**Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.