

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a X-a

Barem de corectare și notare:

### SUBIECTUL 1

Să se arate că  $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$ , pentru orice  $a, b, c \in (0, \infty)$ .

\*\*\*

**Soluție:**

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c}} \sqrt{\frac{b+c}{a}} \sqrt{\frac{c+a}{b}}} = 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \dots\dots\dots 3p$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac} = 8abc \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Deci } \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt[6]{8} = 3\sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$$

### SUBIECTUL 2

a) Fie  $a, b \in (0, +\infty)$ ,  $a \neq 1$ . Studiați monotonia funcției  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x + b \cdot \log_a x$ .

b) Rezolvați ecuația:  $2024^{x^2-2} + \log_{2024}(x-1) = 2024^x$ .

**Cătălin Zîrnă**

**Soluție:**

a) Dacă  $a \in (0, 1)$ ,  $b > 0 \Rightarrow f$  strict descrescătoare ca sumă de funcții strict descrescătoare

Dacă  $a \in (1, \infty)$ ,  $b > 0 \Rightarrow f$  strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare .....3p

$$\text{b) } 2024^{x^2-2} + \log_{2024}(x-1) = 2024^x \Rightarrow 2024^{x^2-1} + 2024 \log_{2024}(x-1) = 2024^{x+1}$$

$$2024^{x^2-1} + 2024 \log_{2024}(x-1) + 2024 \log_{2024}(x+1) = 2024^{x+1} + 2024 \log_{2024}(x+1) \Rightarrow$$

$$2024^{x^2-1} + 2024 \log_{2024}(x^2-1) = 2024^{x+1} + 2024 \log_{2024}(x+1) \Rightarrow \dots\dots\dots 2p$$

$$f(x^2-1) = f(x+1) \text{ unde } f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 2024^t + 2024 \log_{2024} t.$$

$$\text{Din a), funcția } f \text{ este strict crescătoare, deci injectivă} \Rightarrow x^2-1 = x+1, x > 1 \Rightarrow x = 2 \dots\dots\dots 2p$$

### SUBIECTUL 3

Fie  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  astfel încât  $\text{Re}(z) \neq 1$ . Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}$  și  $z_1 = a + b + c$ ,  $z_2 = a + b \cdot z + c \cdot \bar{z}$ ,

$z_3 = a + b \cdot \bar{z} + c \cdot z$ . Demonstrați că  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $a \in \mathbb{R}$  și  $\bar{b} = c$ .

**Nelu Chichirim**

**Soluție:**

$$\text{Dacă } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}, z_2 + z_3 - 2z_1 = (b+c)(2\text{Re}(z)-2) \in \mathbb{R} \text{ și cum } \text{Re}(z) \neq 1 \Rightarrow b+c \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } z_1 = a + b + c \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$$

$$z_2 - z_3 = (b-c)(z - \bar{z}) = 2(b-c) \cdot i \cdot \text{Im}(z) \in \mathbb{R} \text{ și } \text{Im}(z) \neq 0 \Rightarrow b-c = \beta i, \beta \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } b+c = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow 2b = \alpha + \beta i, 2c = \alpha - \beta i \Rightarrow \bar{b} = c \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } a \in \mathbb{R} \text{ și } \bar{b} = c, \text{ avem } z_1 = a + b + \bar{b} \in \mathbb{R}, z_2 = a + b \cdot z + \bar{b} \cdot \bar{z} = a + u + \bar{u} \in \mathbb{R},$$

$$z_3 = a + b \cdot \bar{z} + \bar{b} \cdot z = a + v + \bar{v} \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 3p$$

#### SUBIECTUL 4

Fie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definită prin  $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Arătați că  $f$  nu este surjectivă.
- b) Determinați  $m \in \mathbb{N}$  pentru care ecuația  $f(x) = m$  are soluție unică.

*Gazeta Matematică, nr. 10/2023*

**Soluție:**

a) De exemplu, funcția nu ia valoarea 2, deci nu este surjectivă.....3p

b)  $n = 10k + r$ ,  $r = \overline{0,9} \Rightarrow f(10k + r) = 7k + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ .....1p

$$f(10k) = 7k, f(10k+1) = 7k, f(10k+2) = 7k+1, f(10k+3) = 7k+1, f(10k+4) = 7k+3$$

$$f(10k+5) = 7k+3, f(10k+6) = 7k+4, f(10k+7) = 7k+4, f(10k+8) = 7k+5,$$

$$f(10k+9) = 7k+6$$
.....2p

Ecuația  $f(x) = m$  are soluție unică doar dacă  $m$  este de forma  $7k+5$  sau  $7k+6$ ,  $k \in \mathbb{N}$  .....1p

**Notă :** Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.