

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare:

SUBIECTUL 1

Rezolvați în $M_3(\mathbb{Z})$ ecuația $X^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gazeta Matematică, nr. 6-7-8/2023

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = XA \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 2p$

$X^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\det X)^{2023} = 1 \Rightarrow \det X = 1$

Dar $\det X = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \dots\dots\dots 2p$

Cum $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq 0 \Rightarrow a+b+c=1, a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=1$

$a+b+c=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=1$

Deducem $a^2+b^2+c^2=1, ab+ac+bc=0 \Rightarrow (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \dots\dots\dots 2p$

$X = I_3, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Verifică doar $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 2

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $\det(I_2 - x \cdot AB) = \det(I_2 - x \cdot BA)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha-1) \cdot \beta \neq 0$, astfel încât $AB + \alpha \cdot BA = \beta \cdot I_2$, atunci $\det(AB - BA) = 0$.

Cătălin Zîrnă

Soluție:

a) Cum $Tr(AB) = Tr(BA)$ și $\det(AB) = \det(BA)$, din teorema Cayley-Hamilton deducem că $\det(I_2 - x \cdot AB) = \det(I_2 - x \cdot BA)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2p$

b)

$AB + \alpha \cdot BA = \beta \cdot I_2 \Rightarrow AB - BA = \beta \cdot I_2 - (\alpha+1)BA \Rightarrow \det(AB - BA) = \det(\beta \cdot I_2 - (\alpha+1)BA)$

$AB + \alpha \cdot BA = \beta \cdot I_2 \Rightarrow \alpha(BA - AB) = \beta \cdot I_2 - (\alpha+1)AB \Rightarrow \alpha^2 \det(AB - BA) = \det(\beta \cdot I_2 - (\alpha+1)AB)$

$\dots\dots\dots 3p$

Din punctul a) se deduce că $\det(\beta \cdot I_2 - (\alpha + 1)AB) = \det(\beta \cdot I_2 - (\alpha + 1)BA)$ și avem

$$\det(AB - BA) = \alpha^2 \det(AB - BA) \dots\dots\dots 1p$$

Dacă $\alpha = -1 \Rightarrow AB - BA = \beta I_2$, relație imposibilă pentru că $Tr(AB - BA) = 0 \neq 2\beta = Tr(\beta I_2)$.

Pentru că $\alpha \neq \pm 1 \Rightarrow \det(AB - BA) = 0 \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 3

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k + 2^{1-k} + 3}$, $\forall n \geq 1$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left((a_n)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{a_n} \right)$.

Cristina Homentcovschi

Soluție:

a) Se arată că $\frac{1}{2^k + 2^{1-k} + 3} = \frac{1}{2^{k-1} + 1} - \frac{1}{2^k + 1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$

Deoarece limita există și este finită, rezultă șir convergent4p

Observație Dacă se arată doar convergența:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1} + 2^{-n} + 3} > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ șir strict crescător}$$

$$\frac{1}{2^k + 2^{1-k} + 3} < \frac{1}{2^k} \Rightarrow 0 < a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ șir mărginit}$$

Deci șirul este convergent.....2p

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left((a_n)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{a_n} \right)$$

.....1p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{-\frac{1}{2^n + 1}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2} - a_n} - 1}{a_n - \frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2^n + 1} \right) = -\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left((a_n)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{a_n} \right) = \frac{-1 - \ln 2}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4

Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $x_{n+1} = x_n + (x_n)^{\frac{1}{x_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - n}{(\ln x_n)^2} = \frac{1}{2}$.

Nelu Chichirim

Soluție:

$x_{n+1} - x_n = (x_n)^{\frac{1}{x_n}} > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow$ șir strict crescător, deci are limită $L \in (0, \infty]$. Presupunem că e convergent și avem $L = L + L^{\frac{1}{L}} \Rightarrow L^{\frac{1}{L}} = 0$, contradicție. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 2p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(x_n)^{1 - \frac{1}{x_n}}} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1 \text{2p}$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și este șir strict crescător, atunci $(\ln x_n)^2 \rightarrow \infty$, strict crescător. Aplicăm criteriul Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - n - 1 - x_n + n}{\ln^2 x_{n+1} - \ln^2 x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{\frac{1}{x_n}} - 1}{\ln \frac{x_{n+1}}{x_n} (\ln x_{n+1} + \ln x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\ln x_n}{x_n}} - 1}{\frac{\ln x_n}{x_n}} \cdot \frac{\ln x_n}{\ln x_{n+1} + \ln x_n} \cdot \frac{1}{x_n \ln \frac{x_{n+1}}{x_n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_{n+1} - \ln x_n}{x_{n+1} - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right)}{x_n \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right)} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\ln x_n}{x_n}} - 1}{\frac{\ln x_n}{x_n}} = 1 \text{1p}$$

$$\frac{\ln x_n}{\ln x_{n+1} + \ln x_n} = \frac{\ln x_n}{\ln \frac{x_{n+1}}{x_n} + 2 \ln x_n} = \frac{1}{\frac{1}{\ln x_n} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} + 2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{1p}$$

$$x_n \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\ln \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right)}{\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}} \cdot (x_{n+1} - x_n) = \frac{\ln \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right)}{\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}} \cdot e^{\frac{\ln x_n}{x_n}} \rightarrow 1. \text{ Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - n}{(\ln x_n)^2} = \frac{1}{2} \text{1p}$$

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.