

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a V-a

Barem de corectare și notare:

SUBIECTUL 1

- Arătați că $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ este pătrat perfect.
- Fie numărul natural $a = 2^{3n+7} - 2^{3n+5} + 2^{3n+2}$. Aflați ultimele două cifre ale numărului a .
- Arătați că numărul $a = 2^{3n+7} - 2^{3n+5} + 2^{3n+2}$ se poate scrie ca sumă de patru cuburi perfecte.

Soluție:

- $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$1p
 $100 = 10^2$1p
- $2^{3n+7} = 2^{3n} \cdot 2^7$; $2^{3n+5} = 2^{3n} \cdot 2^5$; $2^{3n+2} = 2^{3n} \cdot 2^2$ 1p
 $a = 2^{3n+7} - 2^{3n+5} + 2^{3n+2} = 2^{3n} \cdot (2^7 - 2^5 + 2^2) = 2^{3n} \cdot 100 \Rightarrow$
 ultimele două cifre sunt 00.....2p
- $a = 2^{3n} \cdot 100 = 2^{3n} \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 2^{3n} \cdot 1^3 + 2^{3n} \cdot 2^3 + 2^{3n} \cdot 3^3 + 2^{3n} \cdot 4^3$1p
 $a = (2^n \cdot 1)^3 + (2^n \cdot 2)^3 + (2^n \cdot 3)^3 + (2^n \cdot 4)^3$1p

SUBIECTUL 2

- Aflați cifra nenulă a pentru care $\overline{aaa} \cdot a + \overline{aaa} + a = \overline{aaaa}$.
- La o împărțire de două numere naturale se obține câtul 4 și restul 1. Dacă mărim deîmpărțitul cu 10 și împărțim la același împărțitor, obținem câtul 5. Aflați numerele inițiale.

Gazeta Matematică

Soluție:

- $111 \cdot a \cdot a + 111 \cdot a + a = 1111 \cdot a$1p
 $111 \cdot a + 111 + 1 = 1111$1p
 $a = 9$1p
- $a = 4b + 1, b > 1$
 $a + 10 = 5b + r, r < b$ 1p
 $4b + 1 + 10 = 5b + r \Rightarrow 11 = b + r$1p
 $r = 0, a = 45, b = 11$1p
 $r = 1, a = 41, b = 10$
 $r = 2, a = 37, b = 9$
 $r = 3, a = 33, b = 8$
 $r = 4, a = 29, b = 7$
 $r = 5, a = 25, b = 6$
 Pentru $r \geq 6$ nu se respectă $r < b$1p

SUBIECTUL 3

Fie numerele:

$$a = 7^{53} \cdot 7^{54} \cdot 7^{55} \cdot \dots \cdot 7^{82} \text{ și}$$

$$b = 1 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{2023}.$$

- a) Verificați că $53 + 54 + \dots + 82 = 2025$.
- b) Arătați că $a = 7^{2025}$.
- c) Demonstrați că $(a - 42b)$ divide $(6b + 1)$.

Soluție:

- a) $53 + 54 + \dots + 82 = 2025$2p
- b) $a = 7^{53} \cdot 7^{54} \cdot 7^{55} \cdot \dots \cdot 7^{82} = 7^{53+54+\dots+82} \Rightarrow a = 7^{2025}$2p
- c) $7b = 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{2024} \Rightarrow 6b = 7^{2024} - 1 \Rightarrow 6b + 1 = 7^{2024}$1p
 $a - 42b = 7$1p
 $7/7^{2024}$1p

SUBIECTUL 4

- a) Două mere cântăresc cât patru pere. Un măr și două pere cântăresc cât trei pere și o piersică. Arătați că șase piersici cântăresc cât trei mere.
- b) Un grup de 23 de copii se întâlnesc după vacanță și își oferă cadouri, ciocolate și magneți. Fiecare băiat îi oferă fiecărei fete din grup un cadou format din 3 ciocolate și 2 magneți, iar fetele își dăruiesc una alteia cadouri formate din câte 3 ciocolate. Știind că numărul de ciocolate oferite este de 3 ori mai mare decât numărul de magneți oferiți, aflați câte fete sunt în grup.

Soluție:

- a) 1 măr = 2 pere.....1p
Finalizare.....1p
- b) $f + b = 23$
Un băiat oferă unei fete 3 ciocolate și 2 magneți.
Un băiat oferă tuturor fetelor din grup $3 \cdot f$ ciocolate și $2 \cdot f$ magneți.....1p
O fată oferă altei fete 3 ciocolate.
O fată oferă tuturor fetelor din grup $3 \cdot (f - 1)$ ciocolate.....1p
Număr total de ciocolate: $3 \cdot f \cdot b + 3 \cdot f \cdot (f - 1)$
Număr total de magneți: $2 \cdot f \cdot b$1p
 $3 \cdot f \cdot b + 3 \cdot f \cdot (f - 1) = 3 \cdot 2 \cdot f \cdot b$
 $b + f - 1 = 2b$1p
 $f = 12$1p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.