

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța 3.02.2024

Clasa a VIII-a

## SUBIECTUL 1

a) Știind că numerele reale  $x, y$  și  $z$  verifică relația  $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 6z + 38 = 0$ , calculați  $x \cdot y \cdot z$ .

b) Fie  $E_n(x) = x^2 + nx - (n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Arătați că  $E_n(x) = (x-1)(x+n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Rezolvați ecuația  $E_1(x) + E_2(x) + E_3(x) + \dots + E_{2023}(x) = 0$ .

## SUBIECTUL 2

a) Arătați că oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , are loc inegalitatea  $\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ .

b) Fie  $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}}$ . Să se arate că  $S < 90$ .

## SUBIECTUL 3

Se consideră punctele necoplanare  $A, B, C, D$  astfel încât  $DA = DB = DC = a$  cm,  $\angle ADB = 60^\circ$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $\angle BDC = 120^\circ$ .

a) Care este natura triunghiului  $ABC$ ?

b) Fie punctul  $P$  pe segmentul  $BD$  cu  $BP = \frac{a}{3}$  cm. Dacă  $PE \perp AB$ ,  $E \in AB$  și  $PF \perp BC$ ,  $F \in BC$ , demonstrați că  $EF \parallel (DAC)$ .

c) Fie punctul  $M$  pe segmentul  $AD$  cu  $AM = \frac{a}{2}$  cm, punctul  $N$  pe segmentul  $CD$  cu  $CN = \frac{a}{4}$  cm și  $MP \cap AB = \{R\}$ ,  $MN \cap AC = \{T\}$ ,  $PN \cap BC = \{L\}$ . Demonstrați că punctele  $R, T, L$  sunt coliniare.

## SUBIECTUL 4

Fie piramida patrulateră regulată  $VABCD$ . O furnică pleacă din punctul  $A$  și ajunge tot în punctul  $A$ , mergând pe fețele laterale. Știind că lungimea drumului parcurs este minimă și că lungimea parcursă pe fața  $VAB$  este de două ori mai mare decât cea parcursă pe fața  $VBC$ , determinați măsurile unghiurilor feței  $VAB$ .

SGM

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.