

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a X-a

secțiunea H2 -filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Demonstrați că numărul $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$ nu este rațional.

b) Dacă $60^a = 3$ și $60^b = 5$, arătați că $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} \in \mathbb{N}$.

Soluție

a) Presupunem că $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} = a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^2 = 11 + 2\sqrt{6} - (4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}) \dots\dots\dots 1p$

Avem $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = a\sqrt{6} + 6 \dots\dots\dots 1p$

Găsim $\sqrt{6} = \frac{a^2+1}{2(1-a)} \in \mathbb{Q}$, ceea ce este fals, deci $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} \notin \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$

b) $60^a = 3 \Rightarrow a = \log_{60} 3$ și $60^b = 5 \Rightarrow b = \log_{60} 5 \dots\dots\dots 1p$

$\frac{1-a-b}{2(1-b)} = \log_{12} 2 \dots\dots\dots 2p$

Deci $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 2 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 2

Să se determine numerele complexe z care verifică relația $|z + 1| + |z| = 1$.

Soluție

Fie $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, de unde $a = -\sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots\dots 2p$

Găsim $a \leq 0$ și $b = 0 \Rightarrow z = a \leq 0$, iar ecuația devine $|a + 1| = a + 1 \dots\dots\dots 3p$

Finalizare $z = a, a \in [-1, 0] \dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL 3

a) Rezolvați ecuația $2^x + \sqrt{2^{x+2} \cdot 5^x} - 3 \cdot 5^x = 0$.

b) Dacă $a, b \in (0, 1)$, arătați că $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$.

Soluție

a) Ecuația devine $2^x + 2 \cdot 10^{\frac{x}{2}} - 3 \cdot 5^x = 0$, sau încă, $\left(\frac{2}{5}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}} - 3 = 0 \dots\dots\dots 1p$

Notăm $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}} = t > 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \dots\dots\dots 1p$

Obținem $t_1 = -3 < 0$, care nu convine și $t_2 = 1 > 0 \Rightarrow x = 0 \dots\dots\dots 1p$

b) Din inegalitatea mediilor, $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}, \forall a, b > 0$, deci $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2}(\log_a ab + \log_b ab) \dots\dots\dots 1p$

$\log_a ab + \log_b ab = 2 + \log_a b + \log_b a \dots\dots\dots 1p$

$x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0 \Rightarrow 2 + \log_a b + \log_b a \geq 4$ și finalizare $\dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL 4

Ioana trebuie să înmulțească 2024 numere complexe de modul 1. Din greșeală, ea schimbă între ele partea reală cu coeficientul părții imaginare, la fiecare factor al produsului și astfel obține ca rezultat final numărul $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Determinați rezultatul corect al produsului celor 2024 de numere complexe.

Soluție

Fie $z = a + bi$ și $z' = b + ai$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow z' = \frac{i}{z}$ 2p

Considerăm $P = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{2024}$. Atunci $z'_1 \cdot z'_2 \cdot \dots \cdot z'_{2024} = \frac{i^{2024}}{P} = \frac{1}{P}$ 3p

Deci $\frac{1}{P} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2p