

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare:

SUBIECTUL 1

Fie $M = [1, +\infty)$. Determinați funcțiile $f : M \rightarrow M$ pentru care legea de compoziție $x \circ y = f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2$ determină pe M o structură de monoid.

Gazeta Matematică, nr. 10/2023

Soluție:

Fie e elementul neutru, deci $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \geq 1 \Rightarrow f(x)(f(e) - 1) = x + f(e) - 2$, $\forall x \geq 1$ 1p

Dacă $f(e) = 1 \Rightarrow 0 = x - 1$, $\forall x \geq 1$, evident imposibil!.....1p

Deci $f(e) > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x + f(e) - 2}{f(e) - 1}$, $\forall x \geq 1 \Rightarrow f(x) = ax + 1 - a$, $a = \frac{1}{f(e) - 1} > 0$ 2p

Funcția este bine definită (strict crescătoare și $f(1) = 1$).....1p

Cum $x \circ y = (f(x) - 1)(f(y) - 1) + 1 = a^2(x - 1)(y - 1) + 1$ care este asociativă și are $e = 1 + \frac{1}{a^2}$ 2p

SUBIECTUL 2

Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea că există $f : G \rightarrow G$ astfel încât $f(x^{-1} \cdot f(y)) = f(x) \cdot y^{-1}$, $\forall x, y \in G$. Arătați că G este comutativ și că f este automorfism de grupuri.

Nelu Chichirim

Soluție:

Pentru $x = e$, elementul neutru $\Rightarrow f(f(y)) = f(e) \cdot y^{-1}$, $\forall y \in G$ 1p

Funcția $g : G \rightarrow G$, $g(y) = ay^{-1}$, $a \in G$, este bijectivă, deci f este bijectivă.....2p

Pentru $x = y = e \Rightarrow f(f(e)) = f(e) \Rightarrow f(e) = e$

Pentru $y = e \Rightarrow f(x^{-1}) = f(x)$, $\forall x \in G \Rightarrow x^{-1} = x$, $\forall x \in G \Rightarrow G$ comutativ.....2p

Cum $x^{-1} = x \Rightarrow f(f(y)) = y$, $f(xf(y)) = f(x)y$, $\forall x, y \in G$

Înlocuind y cu $f(y) \Rightarrow f(xf(f(y))) = f(x)f(y) \Rightarrow f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in G$ și cum f bijectivă, f este automorfism.....2p

SUBIECTUL 3

Arătați că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^{12} \cdot e^{-t} dt = n!$.

Cătălin Zîrnă

Soluție:

Notăm $I_k = \int_0^x t^k e^{-t} dt$, $k \in \mathbb{N}$, $I_0 = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ și avem relația $I_k = -\frac{x^k}{e^x} + kI_{k-1}$, $\forall k \geq 1$ 2p

Deducem $\frac{I_k}{k!} = -\frac{x^k}{e^x \cdot k!} + \frac{I_{k-1}}{(k-1)!}$, $\forall k \geq 1$ și sumăm pentru $k = \overline{1, 12} \Rightarrow I_{12} = 12! \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - \frac{1}{e^x} \sum_{k=1}^{12} \frac{x^k}{k!}$ 3p

Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \sum_{k=1}^{12} \frac{x^k}{k!} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{12} \frac{x^k}{k!}}{e^x} = 0$ (L'Hospital), deducem că $n = 12$ 2p

SUBIECTUL 4

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care verifică relația $f'(e^x - e^{-x}) = (e^x - e^{-x})'$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Să se determine o primitivă F a funcției f care verifică $F(0) = f(0) = 0$.

Cristina Homencovski

Soluție:

Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - e^{-x}$. Se arată că este bijectivă.

$$\text{Din } e^x - e^{-x} = t \Rightarrow e^x = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} \Rightarrow f'(t) = \sqrt{t^2 + 4}, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{t^2 + 4} dt = \frac{1}{2} t \sqrt{t^2 + 4} + 2 \ln(t + \sqrt{t^2 + 4}) + C$$

$$\text{Cum } f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 4} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) - 2 \ln 2 \dots\dots\dots 5p$$

$$\text{Primitiva căutată este } F(x) = \frac{1}{6} (x^2 - 8) \sqrt{x^2 + 4} + 2x \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) - 2x \ln 2 + \frac{8}{3} \dots\dots\dots 2p$$

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.