

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a VI-a

### Barem de corectare și notare:

#### SUBIECTUL 1

a) Arătați că numerele  $6n+7$  și  $4n+5$  sunt prime între ele pentru orice  $n \in \mathbb{N}$

b) Fie  $x, y$  numere naturale nenule. Știind că  $(x + 4y)$  este divizibil cu 7, demonstrați că fracția  $\frac{x+4y}{2x+y}$  este reductibilă.

#### **Soluție:**

a) Fie  $d = (6n + 7; 4n + 5) \Rightarrow d \mid (6n + 7)$  și  $d \mid (4n + 5)$  ..... 1p

$d \mid (12n + 15) - (12n + 14)$ ..... 1p

$d = 1$  rezultă numerele sunt prime între ele ..... 1p

b) Din ipoteză  $7 \mid (x+4y)$ . Dar  $7 \mid (7x+7y)$  ..... 1 p

și atunci  $7 \mid (7x+7y)-(x+4y)$ , adică  $7 \mid (6x+3y)$  sau  $7 \mid 3(2x+y)$ ..... 1 p

Cum 7 nu divide pe 3 rezultă  $7 \mid (2x+y)$ ..... 1 p

În concluzie fracția  $\frac{x+4y}{2x+y}$  se simplifică prin 7, deci este reductibilă..... 1 p

#### SUBIECTUL 2

Determinați numerele naturale nenule  $x, y, z$  și  $t$  știind că sunt adevărate relațiile

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3000 \text{ și } \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}.$$

#### **Soluție:**

$$\frac{x+2}{x} = \frac{y+4}{y} = \frac{z+6}{z} = \frac{t+8}{t} \text{ ..... 1p}$$

$$1 + \frac{2}{x} = 1 + \frac{4}{y} = 1 + \frac{6}{z} = 1 + \frac{8}{t} \text{ ..... 1p}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{t}{8} = k \Rightarrow x = 2k, y = 4k, z = 6k, t = 8k \text{ ..... 2p}$$

$$120k^2 = 3000 \Rightarrow k^2 = 25, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 5 \text{ ..... 2p}$$

$$x = 10, y = 20, z = 30, t = 40 \text{ ..... 1p}$$

### SUBIECTUL 3

Se consideră unghiurile cu interioarele disjuncte  $\sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \sphericalangle A_3OA_4, \dots, \sphericalangle A_{10}OA_1$ , formate în jurul punctului O, astfel încât suma oricăror două unghiuri consecutive este de  $72^\circ$  și

$$\frac{\sphericalangle A_1OA_2}{\sphericalangle A_6OA_7} = \frac{2}{7}.$$

- a) Aflați măsura unghiului  $\sphericalangle A_2OA_3$ .  
b) Fie  $OM$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle A_6OA_7$ , determinați măsura unghiului  $\sphericalangle A_1OM$ .

**Soluție:**

- a)  $\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 = 72^\circ, \sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_4 = 72^\circ$   
 $\Rightarrow \sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_3OA_4 \dots\dots\dots 1p$   
 $\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_3OA_4 = \sphericalangle A_5OA_6 = \sphericalangle A_7OA_8 = \sphericalangle A_9OA_{10}$  și  
 $\sphericalangle A_2OA_3 = \sphericalangle A_4OA_5 = \sphericalangle A_6OA_7 = \sphericalangle A_8OA_9 = \sphericalangle A_{10}OA_1 \dots\dots\dots 1p$   
 $\frac{\sphericalangle A_1OA_2}{\sphericalangle A_6OA_7} = \frac{2}{7}$  și  $\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_6OA_7 = 72^\circ$   
 $\Rightarrow \sphericalangle A_1OA_2 = 16^\circ, \sphericalangle A_2OA_3 = 56^\circ \dots\dots\dots 2p$   
b)  $OM$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle A_6OA_7 \Rightarrow \sphericalangle A_6OM = \sphericalangle MOA_7 \dots\dots\dots 1p$   
 $\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + \dots + \sphericalangle A_5OA_6 + \sphericalangle A_6OM = 188^\circ \dots\dots\dots 1p$   
 $\sphericalangle A_1OM = 360^\circ - 188^\circ = 172^\circ \dots\dots\dots 1p$

### SUBIECTUL 4

Se dau numerele  $N_1 = \overline{xxx \dots xx}$  cu 2024 cifre și  $N_2 = \overline{x0x0x \dots 0x}$  cu 2023 cifre, unde  $x$  este cifră nenulă.

- a) Să se determine restul împărțirii numărului  $\frac{N_1}{x}$  la 6;  
b) Să se studieze dacă numărul  $\frac{N_1}{N_2}$  este natural.

**Soluție:**

- a)  $\frac{N_1}{x} = \underbrace{111 \dots 11}_{2024 \text{ ori}} \dots\dots\dots 1p$   
 $\underbrace{111 \dots 11}_{2024 \text{ ori}} = \underbrace{111 \dots 1100}_{2022 \text{ ori}} + 6 + 5 = M_6 + 5 \Rightarrow \text{restul este } 5 \dots\dots\dots 2p$   
b)  $N_1 = x(10^{2023} + 10^{2022} + \dots + 10 + 1) = x \cdot \frac{10^{2024}-1}{9} \dots\dots\dots 1p$   
 $N_2 = x(10^{2022} + 10^{2020} + \dots + 10^2 + 1) =$   
 $= x(100^{1011} + 100^{1010} + \dots + 100 + 1) = x \cdot \frac{100^{1012}-1}{99} \dots\dots\dots 1p$   
 $\frac{N_1}{N_2} = \frac{10^{2024}-1}{9} \cdot \frac{99}{100^{1012}-1} = 11 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2p$

**Notă :** Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.