

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare:

SUBIECTUL 1

a) Arătați că: $\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}.$

b) Comparați numerele a și b, unde:

$$a = \sqrt{3^{2024} - 2 \cdot 3^{2023} - 2 \cdot 3^{2022} - \dots - 2 \cdot 3 - 2} - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$$

$$b = \frac{2}{5\sqrt{6}-3\sqrt{10}} : \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right).$$

Soluție:

a) $\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{4\sqrt{15}} \dots\dots\dots 1p$

$(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) = 30 - 6\sqrt{15} + 10\sqrt{15} - 3 = 4\sqrt{15}$
 $\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}} \dots\dots\dots 2p$

b) $\sqrt{3^{2024} - 2 \cdot 3^{2023} - \dots - 2 \cdot 3 - 2} = \sqrt{3^{2023} \cdot (3 - 2) - 2 \cdot 3^{2022} - \dots - 2 \cdot 3 - 2} = \dots =$
 $= \sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 - 2} = 1 \dots\dots\dots 1p$

$a = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = 1 - |2 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5} \dots\dots\dots 1p$

$b = \frac{2}{\sqrt{2}(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})} \cdot (5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) = \sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$

$3 - \sqrt{5} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 3 < \sqrt{5} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 9 < 7 + 2\sqrt{10} \Leftrightarrow 2 < 2\sqrt{10} \Rightarrow a < b. \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 2

Aflați numerele $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, știind că $x + \frac{1}{y} = 2$, $y + \frac{1}{z} = 3$ și $xyz = 1$.

Soluție:

$x + \frac{1}{y} = 2 \mid \cdot y \Rightarrow xy + 1 = 2y \Rightarrow xy = 2y - 1 \dots\dots\dots 2p$

$xyz = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = xy \Rightarrow y + xy = 3 \Rightarrow xy = 3 - y \dots\dots\dots 2p$

$2y - 1 = 3 - y \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \dots\dots\dots 1p$

$x + \frac{3}{4} = 2 \Rightarrow x = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \dots\dots\dots 1p$

$\frac{1}{z} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow z = \frac{3}{5} \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 3

În exteriorul rombului ABCD cu măsura unghiului A mai mică de 60^0 se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și ADF.

- Arătați că $EF=EC$.
- Dacă $AC \cap BF = \{M\}$, demonstrați că punctele E, M, D sunt coliniare.

Soluție:

- $\angle EAF = 120^0 + \angle BAD$, $\angle EBC = 360^0 - 60^0 - \angle ABC = 120^0 + \angle BAD$1p
 $\triangle EAF \equiv \triangle EBC \Rightarrow EF = EC$2p
- $CE=CF$ și $AE=AF \Rightarrow CA$ mediatoarea segmentului $EF \Rightarrow ME=MF$1p
 $FE=CF$ și $BE=BC \Rightarrow BF$ mediatoarea segmentului $EC \Rightarrow ME=MC$1p
 $MF=MC$, $DC=DF$, $EC=EF \Rightarrow E, M, D$ aparțin mediatoarei segmentului CF1p
 $\Rightarrow E, M, D$ coliniare.....1p

SUBIECTUL 4

Se consideră pătratul ABCD, M mijlocul lui AD, P piciorul perpendicularei duse din C pe MB și Q punctul de intersecție dintre CP și AB. Demonstrați că:

- $MQ = \frac{AC}{2}$
- $\angle APB = 135^0$.

Soluție:

- $\angle PCB \equiv \angle PBQ$1p
 $\triangle CBQ \equiv \triangle BAM \Rightarrow BQ = AM \Rightarrow Q$ mijlocul lui AB.....1p
 MQ linie mijlocie în $\triangle ADB \Rightarrow MQ = \frac{DB}{2} = \frac{AC}{2}$1p
- Fie $AT \perp MB$, $T \in MB \Rightarrow PQ$ linie mijlocie în $\triangle ATB \Rightarrow BP = PT$ 2p
 $\triangle TBA \equiv \triangle PCB \Rightarrow AT = PB$ 1p
 $\triangle ATP$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow \angle APT = 45^0 \Rightarrow \angle APB = 135^0$1p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.