

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța 3.02.2024

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

**SUBIECTUL 1**

a) Știind că numerele reale  $x, y$  și  $z$  verifică relația  $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 6z + 38 = 0$ , calculați  $x \cdot y \cdot z$ .

b) Fie  $E_n(x) = x^2 + nx - (n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Arătați că  $E_n(x) = (x-1)(x+n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Rezolvați ecuația  $E_1(x) + E_2(x) + E_3(x) + \dots + E_{2023}(x) = 0$ .

**BAREM DE CORECTARE**

a)  $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0$  .....1p

$x = 5, y = -2, z = 3$  .....1p

$xyz = -30$  .....1p

b) i)  $E_n(x) = x^2 + nx - n - 1 = x^2 - 1 + nx - n$  .....1p

$E_n(x) = (x-1)(x+1) + n(x-1) = (x-1)(x+1+n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$  .....1p

ii)  $E_1(x) = (x-1)(x+2), E_2(x) = (x-1)(x+3), \dots, E_{2023}(x) = (x-1)(x+2024)$

$E_1(x) + E_2(x) + E_3(x) + \dots + E_{2023}(x) = (x-1)(x+2+x+3+\dots+x+2024) = 0$  .....1p

$x = 1$  sau  $x = -1013$  .....1p

**SUBIECTUL 2**

a) Arătați că oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , are loc inegalitatea  $\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ .

b) Fie  $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}}$ . Să se arate că  $S < 90$ .

**BAREM DE CORECTARE**

a)  $1 < 2\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \Rightarrow 1 < 2n - 2\sqrt{n(n-1)}$  .....1p

$2\sqrt{n(n-1)} < 2n - 1 \Rightarrow 4n(n-1) < (2n-1)^2$  .....1p

$4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$  .....1p

b)  $1 < 2(\sqrt{1} - \sqrt{0}), \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}), \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}), \dots, \frac{1}{\sqrt{2024}} < 2(\sqrt{2024} - \sqrt{2023})$  .....2p

$S < 2\sqrt{2024}$  .....1p

$\sqrt{2024} < \sqrt{2025} \Rightarrow S < 90$  .....1p

### SUBIECTUL 3

Se consideră punctele necoplanare  $A, B, C, D$  astfel încât  $DA = DB = DC = a$  cm,  $\sphericalangle ADB = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle ADC = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle BDC = 120^\circ$ .

a) Care este natura triunghiului  $ABC$ ?

b) Fie punctul  $P$  pe segmentul  $BD$  cu  $BP = \frac{a}{3}$  cm. Dacă  $PE \perp AB, E \in AB$  și  $PF \perp BC, F \in BC$ , demonstrați că  $EF \parallel (DAC)$ .

c) Fie punctul  $M$  pe segmentul  $AD$  cu  $AM = \frac{a}{2}$  cm, punctul  $N$  pe segmentul  $CD$  cu  $CN = \frac{a}{4}$  cm și  $MP \cap AB = \{R\}, MN \cap AC = \{T\}, PN \cap BC = \{L\}$ . Demonstrați că punctele  $R, T, L$  sunt coliniare.

### BAREM DE CORECTARE

a)  $AB = a$  cm,  $AC = a\sqrt{2}$  cm,  $BC = a\sqrt{3}$  cm .....1p

Reciproca teoremei lui Pitagora în  $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$  dreptunghic.....1p

b)  $EB = \frac{a}{6}$  cm,  $FB = \frac{a\sqrt{3}}{6}$  cm .....1p

În  $\triangle ABC$   $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{6}$ . Aplicând reciproca teoremei lui Thales  $\Rightarrow EF \parallel AC$  .....1p

$AC \subset (DAC), EF \parallel AC \Rightarrow EF \parallel (DAC)$  .....1p

c)  $\{R\} = AB \cap MP \Rightarrow R \in AB \subset (ABC), R \in MP \subset (MNP) \Rightarrow R \in (ABC) \cap (MNP)$

Analog  $L, T \in (ABC) \cap (MNP)$  .....1p

$R, L, T \in (ABC) \cap (MNP) \Rightarrow R, T, L$  coliniare.....1p

### SUBIECTUL 4

Fie piramida patrulateră regulată  $VABCD$ . O furnică pleacă din punctul  $A$  și ajunge tot în punctul  $A$ , mergând pe fețele laterale. Știind că lungimea drumului parcurs este minimă și că lungimea parcursă pe fața  $VAB$  este de două ori mai mare decât cea parcursă pe fața  $VBC$ , determinați măsurile unghiurilor feței  $VAB$ .

SGM

### BAREM DE CORECTARE

Desfășurăm suprafața laterală și obținem triunghiurile  $VAB, VBC, VCD, VDA'$ . Punctele  $M, N, P$  sunt intersecțiile drumului furnicii cu  $VB, VC$ , respectiv  $VD$ . Lungimea drumului parcurs este minimă dacă punctele  $A, M, N, P, A'$  sunt coliniare.....1p

Notăm  $\sphericalangle AVB = \sphericalangle BVC = \sphericalangle CVD = \sphericalangle DVA' = x^\circ$

$\triangle VAA'$  isoscel,  $VN$  bisectoarea  $\sphericalangle AVA' \Rightarrow VN \perp AA'$  .....1p

$A_{\triangle VAM} = 2A_{\triangle VMN}$  .....1p

$A_{\triangle VAM} = \frac{VA \cdot VM \cdot \sin x}{2}, A_{\triangle VMN} = \frac{VM \cdot VN \cdot \sin x}{2} \Rightarrow VA = 2VN$  .....2p

Aplicând reciproca teoremei unghiului de  $30^\circ$  în  $\triangle VAN$  dreptunghic  $\Rightarrow \sphericalangle VAN = 30^\circ$  .....1p

$\sphericalangle AVB = 30^\circ, \triangle VAB$  isoscel  $\Rightarrow \sphericalangle VAB = \sphericalangle VBA = 75^\circ$  .....1p

**Notă:** Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.