

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a IX-a

Barem de corectare și notare:

### SUBIECTUL 1

Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $2\{x\}^2 < \{x\}$ , cu proprietatea că cel mai apropiat întreg de  $x$  este  $3x - [x] - 6\{x\} - 1$ . (S-a notat cu  $\{a\}$  și  $[a]$ , partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real  $a$ )

*Gazeta Matematică, nr. 6-7-8/2023*

**Soluție:**

Cum  $\{x\} \in [0, 1)$ , din  $2\{x\}^2 < \{x\} \Rightarrow \{x\} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  .....2p

$3x - [x] - 6\{x\} - 1 = 2[x] - 3\{x\} - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3\{x\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{3}$  .....2p

$\{x\} = \frac{1}{3} \Rightarrow$  cel mai apropiat întreg de  $x$  este partea sa întreagă, deci

$2[x] - 3\{x\} - 1 = [x] \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$  .....3p

### SUBIECTUL 2

a) Să se arate că  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 a_2 \dots a_n + n - 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  și  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1]$  sau  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [1, \infty)$ .

b) Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\frac{2^n + 1}{1^n + 1} + \frac{3^n + 1}{2^n + 1} + \frac{4^n + 1}{3^n + 1} + \dots + \frac{2025^n + 1}{2024^n + 1} = \frac{2025^n + 1}{2} + 2023$ .

*Gabriela Constantinescu*

**Soluție:**

a) Demonstrăm prin inducție matematică

$n = 2$ :  $a_1 + a_2 \leq a_1 a_2 + 1 \Leftrightarrow (a_1 - 1)(1 - a_2) \leq 0$  care este adevărată.....1p

Presupunem  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 a_2 \dots a_n + n - 1$  și demonstrăm că

$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} \leq a_1 a_2 \dots a_{n+1} + n$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 a_2 \dots a_n + n - 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \leq a_1 a_2 \dots a_n + a_{n+1} + n - 1$

Dar  $a_1 a_2 \dots a_n + a_{n+1} \leq a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} + 1$ , și prin adunarea celor două relații obținem

$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} \leq a_1 a_2 \dots a_{n+1} + n$  .....2p

b)  $\frac{2^n + 1}{1^n + 1} \cdot \frac{3^n + 1}{2^n + 1} \cdot \frac{4^n + 1}{3^n + 1} \dots \frac{2025^n + 1}{2024^n + 1} = \frac{2025^n + 1}{2}$

Aplicăm punctul a) pentru numerele supraunitare  $\frac{2^n + 1}{1^n + 1}, \frac{3^n + 1}{2^n + 1}, \dots, \frac{2025^n + 1}{2024^n + 1}$  și avem

$\frac{2^n + 1}{1^n + 1} + \frac{3^n + 1}{2^n + 1} + \frac{4^n + 1}{3^n + 1} + \dots + \frac{2025^n + 1}{2024^n + 1} \leq \frac{2025^n + 1}{2} + 2023$  .....2p

Deci ecuația este cazul de egalitate care se obține pentru 2022 numere egale cu 1

Rezultă  $n = 0$

.....2p

### SUBIECTUL 3

Să se arate că  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ , pentru orice  $a, b, c \in (0, +\infty)$ .

**Cătălin Zîrnă**

**Soluție:**

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \text{ și o înmulțim cu } (a+b+c) \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Avem } 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(a+b+c) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{De aici avem } (a+b+c)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \dots\dots\dots 1p$$

### SUBIECTUL 4

Fie triunghiul  $ABC$  și  $M \in (AB)$ ,  $N \in (BC)$  și  $P \in (AC)$  astfel încât  $AM = BN = CP$ . Fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  și  $G_1$  centrul de greutate al triunghiului  $MNP$ . Știind că punctele  $A, G$  și  $G_1$  sunt coliniare, să se arate că  $a = \frac{2bc}{b+c}$ , unde  $a = BC$ ,  $b = AC$  și  $c = AB$ .

**Nelu Chichirim**

**Soluție:**

Notăm  $x = AM = BN = CP$ .

$$\overrightarrow{AM} = \frac{x}{c} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP} = \frac{b-x}{b} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN} = \frac{a-x}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{x}{a} \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 2p$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}) = \frac{1}{3} \left( \frac{x}{c} + \frac{a-x}{a} \right) \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \left( \frac{b-x}{b} + \frac{x}{a} \right) \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1p$$

$$A, G, G_1 \text{ coliniare} \Rightarrow \frac{x}{c} + \frac{a-x}{a} = \frac{b-x}{b} + \frac{x}{a} \Rightarrow a = \frac{2bc}{b+c} \dots\dots\dots 3p$$

**Notă :** Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.