

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1

Să se arate că $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$, pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$.

SUBIECTUL 2

a) Fie $a, b \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Studiați monotonia funcției $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + b \cdot \log_a x$.

b) Rezolvați ecuația: $2024^{x^2-2} + \log_{2024}(x-1) = 2024^x$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 3

Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\operatorname{Re}(z) \neq 1$. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ și $z_1 = a + b + c$, $z_2 = a + b \cdot z + c \cdot \bar{z}$, $z_3 = a + b \cdot \bar{z} + c \cdot z$. Demonstrați că $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R}$ și $\bar{b} = c$.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 4

Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definită prin $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că f nu este surjectivă.

b) Determinați $m \in \mathbb{N}$ pentru care ecuația $f(x) = m$ are soluție unică.

*Gazeta Matematică, nr. 10/2023***Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.