

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1

Determinați numerele reale x pentru care $2\{x\}^2 < \{x\}$, cu proprietatea că cel mai apropiat întreg de x este $3x - [x] - 6\{x\} - 1$.

(S-a notat cu $\{a\}$ și $[a]$, partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a)

Gazeta Matematică, nr. 6-7-8/2023

SUBIECTUL 2

a) Să se arate că $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 a_2 \dots a_n + n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1]$ sau $a_1, a_2, \dots, a_n \in [1, \infty)$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{2^n + 1}{1^n + 1} + \frac{3^n + 1}{2^n + 1} + \frac{4^n + 1}{3^n + 1} + \dots + \frac{2025^n + 1}{2024^n + 1} = \frac{2025^n + 1}{2} + 2023$.

Gabriela Constantinescu

SUBIECTUL 3

Să se arate că $(a + b + c) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$, pentru orice $a, b, c \in (0, +\infty)$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 4

Fie triunghiul ABC și $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ și $P \in (AC)$ astfel încât $AM = BN = CP$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și G_1 centrul de greutate al triunghiului MNP . Știind că punctele A , G și G_1 sunt coliniare, să se arate că $a = \frac{2bc}{b+c}$, unde $a = BC$, $b = AC$ și $c = AB$.

*Nelu Chichirim***Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.