

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A VI-A
SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV**

Problema 1. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{a0ab}$ pentru care $2 \cdot (\overline{ab} + 1) = 2^b + 3^a + 5^{b-a}$.

prof. Ionuț Mazalu, Brăila

Soluție.

Deoarece $2 \cdot (\overline{ab} + 1) \leq 200 \Rightarrow a \leq 4, a \leq b \Rightarrow b \leq 6 \dots\dots\dots 2p$

Pentru $a=1$, nu se verifica relatia din enunt $\dots\dots\dots 1p$

Pentru $a=2$ si $b=4$ se verifica relatia din enunt $\dots\dots\dots 1p$

Pentru $a=3$, nu se verifica relatia din enunt $\dots\dots\dots 1p$

Pentru $a=4$, nu se verifica relatia din enunt $\dots\dots\dots 1p$

In concluzie numarul natural de forma $\overline{a0ab}$ este 2024.....1p

Problema 2. . Se consideră numărul $A = \frac{1}{2024 \cdot 2025} + \frac{1}{2025 \cdot 2026} + \frac{1}{2026 \cdot 2027} + \frac{1}{2027}$.

Să se determine x din proporția $\frac{161}{A \cdot x} = \frac{(2^{2024} + 2^{2025} + 2^{2026}) \cdot 253}{8^{674}}$.

(***)

Soluție.

$$A = \frac{2025 - 2024}{2024 \cdot 2025} + \frac{2026 - 2025}{2025 \cdot 2026} + \frac{2027 - 2026}{2026 \cdot 2027} + \frac{1}{2027} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} + \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027} + \frac{1}{2027} = \frac{1}{2024} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{161}{A \cdot x} = \frac{(2^{2024} + 2^{2025} + 2^{2026}) \cdot 253}{8^{674}} \Rightarrow \frac{161}{\frac{1}{2024} \cdot x} = \frac{2^{2024} (1 + 2 + 2^2) \cdot 253}{(2^3)^{674}} \Rightarrow$$

$\dots\dots\dots 2p$

$$\Rightarrow \frac{161 \cdot 2024}{x} = \frac{2^{2024} \cdot 7 \cdot 253}{2^{2022}} \Rightarrow x = \frac{161 \cdot 2024 \cdot 2^{2022}}{2^{2024} \cdot 7 \cdot 253}$$

$\dots\dots\dots 2p$

$$x = 46 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3. Se consideră unghiurile $A_0OA_1, A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_nOA_{n+1}$, cu interioarele disjuncte, astfel încât $\sphericalangle A_0OA_1 = 1'$ și, pentru $i = 1, 2, 3, \dots, \sphericalangle A_iOA_{i+1} = \sphericalangle A_{i-1}OA_i + 2'$. Aflați toate valorile numărului natural n pentru care $\sphericalangle A_0OA_{n+1}$ are măsura exprimată printr-un număr natural de grade.

Soluție.

Dacă toate unghiurile sunt de aceeași parte a dreptei OA_0 , atunci

$$\sphericalangle A_0OA_{n+1} = 1' + 3' + 5' + \dots + (2n+1)' = \left((n+1)^2 / 60 \right)^\circ \dots\dots\dots 2p$$

Dacă există unghiuri de părți diferite ale dreptei, atunci $\sphericalangle A_0OA_{n+1} = 360^\circ - \left((n+1)^2 / 60 \right)^\circ$ și pentru ca interioarele unghiurilor să fie disjuncte, $(n+1)^2 / 60 \leq 360$.

$\dots\dots\dots 2p$
În ambele cazuri, pentru a avea o măsură exprimată printr-un număr natural de grade, este

necesar și suficient ca $(n+1)^2 = 60k$, cu $k \leq 360, k \in \mathbb{N}^*$

$\dots\dots\dots 2p$
Cum $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, obținem $k = 3 \cdot 5 \cdot p^2, p \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n \in \{29, 59, 89, 119\}$

$\dots\dots\dots 1p$

Problema 4. Se dau unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$ unghiuri în jurul unui punct cu interioarele disjuncte astfel încât :

$$m(\sphericalangle AOB) = a \cdot m(\sphericalangle BOC); m(\sphericalangle DOC) = b \cdot m(\sphericalangle BOC)$$

$$m(\sphericalangle DOA) = c \cdot m(\sphericalangle AOB) \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{Q}^* \text{ verifica relațiile } a \cdot b = 0,3; b \cdot c = 0,(3); c \cdot a = 0,4$$

a) Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$

b) Determinați măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului AOD și semidreapta opusă semidreptei [OB].

prof. Daniela Tilincă, Brăila

Soluție.

a) Înmulțind relațiile $a \cdot b = 0,3; b \cdot c = 0,(3); c \cdot a = 0,4$ obținem

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = \frac{4}{100} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = \frac{1}{5}, \text{ înlocuind relațiile initiale } \Rightarrow a = \frac{3}{5}; b = \frac{1}{2}; c = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = \frac{3}{5} \cdot m(\sphericalangle BOC); m(\sphericalangle DOC) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BOC)$$

$$m(\sphericalangle DOA) = \frac{2}{3} \cdot m(\sphericalangle AOB) = \frac{2}{3} \cdot m(\sphericalangle BOC); \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{notând } m(\sphericalangle BOC) = x \Rightarrow x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{5} + \frac{3x}{5} = 360^\circ \Rightarrow x = 144^\circ (m(\sphericalangle BOC)); m(\sphericalangle DOC) = 72^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\sphericalangle AOB) = 86^\circ 24'; m(\sphericalangle AOD) = 57^\circ 36' \dots\dots\dots 1p$$

b) Fie [OR semidreapta opusă semidreptei [OB și [OM bisectoarea $\sphericalangle AOD$ 2p

$$m(\sphericalangle ROM) = 180^\circ - m(\sphericalangle AOB) - \frac{m(\sphericalangle DOA)}{2} = 64^\circ 48'$$