

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A VIII-A**

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Soluție.

$$(a^2 - 2ac + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) + (b^2 + 4a^2 + 16 - 4ab + 8b - 16a) + (d^2 + 4b^2 + 4 - 4bd + 8b - 4d) = 0, \dots 2 \text{ puncte}$$

$$(a-c)^2 + (c-d)^2 + (b-2a+4)^2 + (d-2b-2)^2 = 0, \dots 2 \text{ puncte}$$

$$(a-c)^2, (c-d)^2, (b-2a+4)^2, (d-2b-2)^2 \geq 0, \dots 1 \text{ punct} \Rightarrow$$

$$a-c = c-d = b-2a+4 = d-2b-2 = 0, \dots 1 \text{ punct}$$

$$\Rightarrow a = c = d, b = 2a - 4, a - 4a + 8 - 2 = 0, 3a = 6, a = 2, b = 0 \Rightarrow \overline{abcd} = 2022, \dots 1 \text{ punct}$$

Problema 2. Soluție:

Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care AB, AC și AD sunt perpendiculare două câte două și $AB = b, AC = c$ și $AD = d$.

a) Calculați sinusul unghiului format de BC cu (ACD) .

b) Arătați că $A_{\triangle ABC}^2 + A_{\triangle ACD}^2 + A_{\triangle ABD}^2 = A_{\triangle BCD}^2$.

Barem

a) $AB \perp AC, AB \perp AD \Rightarrow AB \perp (ACD)$.

Proiecția segmentului BC pe (ACD) este segmentul AC 1 punct

$$\sphericalangle(BC, (ACD)) = \sphericalangle(ACB), \sin \sphericalangle(ACB) = \frac{AB}{BC}, BC = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow \sin \sphericalangle(ACB) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \dots 1 \text{ punct}$$

b) Construim $AM \perp CD, AB \perp (ADC), CD \subset (ACD), AM \subset (ACD) \Rightarrow BM \perp CD$, 1 punct

$$AM = \frac{cd}{\sqrt{c^2 + d^2}} \Rightarrow BM^2 = b^2 + \frac{c^2 d^2}{c^2 + d^2} = \frac{b^2 c^2 + b^2 d^2 + c^2 d^2}{c^2 + d^2} \dots 2 \text{ puncte}$$

$$A_{\triangle BCD}^2 = \left(\frac{BM \cdot CD}{2} \right)^2 = \frac{BM^2 \cdot CD^2}{4} = (c^2 + d^2) \cdot \frac{b^2 c^2 + b^2 d^2 + c^2 d^2}{c^2 + d^2} \cdot \frac{1}{4} = \dots 2 \text{ puncte}$$

$$= \frac{b^2 c^2 + b^2 d^2 + c^2 d^2}{4} = \frac{b^2 c^2}{4} + \frac{b^2 d^2}{4} + \frac{c^2 d^2}{4} = A_{\triangle ABC}^2 + A_{\triangle ACD}^2 + A_{\triangle ABD}^2.$$

Problema 3. Soluție.

a)

$$x^2 = (y^2 + 3y)(y^2 + 3y + 2) + 4$$

$$\text{Notăm } y^2 + 3y = t \text{ și obținem } x^2 = (t+1)^2 + 3$$

$$\Rightarrow x^2 - (t+1)^2 = 3 \Rightarrow (x-t-1)(x+t+1) = 3 \dots 2 \text{ puncte}$$

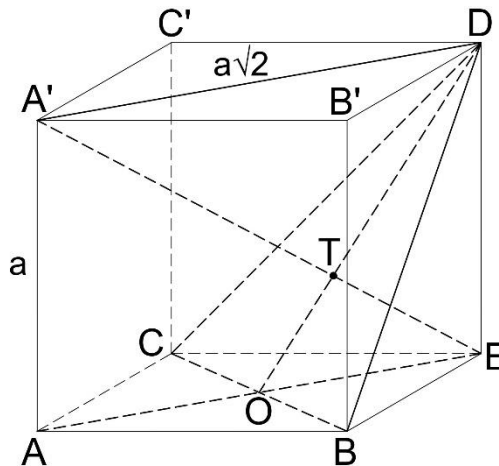
$$\text{Se iau cazurile } \begin{cases} x-t-1=1 \\ x+t+1=3 \end{cases} \Rightarrow x=2 \text{ și } y^2+3y=0 \Rightarrow (x,y) \in \{(2,0);(2,-3)\}$$

$$\begin{cases} x-t-1=3 \\ x+t+1=1 \end{cases} \Rightarrow x=2 \text{ și } y^2+3y=-2 \Rightarrow (x,y) \in \{(2,-1);(2,-2)\}$$

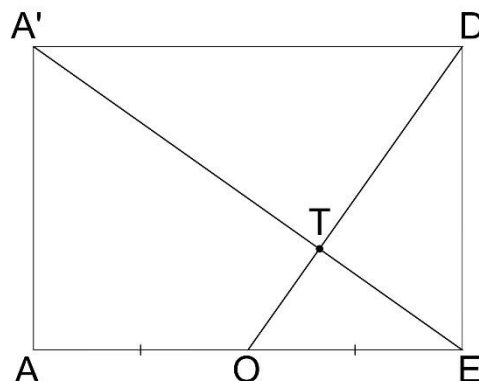
$$\begin{cases} x-t-1=-3 \\ x+t+1=-1 \end{cases} \Rightarrow x=-2 \text{ și } y^2+3y=0 \Rightarrow (x,y) \in \{(-2,0);(-2,-3)\}$$

$$\begin{cases} x-t-1=-1 \\ x+t+1=-3 \end{cases} \Rightarrow x=-2 \text{ și } y^2+3y=-2 \Rightarrow (x,y) \in \{(-2,-1);(-2,-2)\} \dots\dots 3 \text{ puncte}$$

- b) $n^3 - n + 2 = n(n-1)(n+1) + 2$ dar $n(n-1)(n+1)$ este divizibil cu 31 punct \Rightarrow
 $n(n-1)(n+1) + 2 = M_3 + 2$ dar $M_3 + 2 \neq m^2 \Rightarrow$ nu există m și n numere naturale pentru
 care $m^2 = n^3 - n + 2$ 1 punct


Problema 4.

- a) Cubul $[ABECA'B'DC']$ respectă condițiile problemei $AA' \perp (ABC)$
 $A'D = a\sqrt{2}$; $A'D \perp AA'$; $BD \perp AB$; $(AB \perp (BED) \Rightarrow AB \perp BD)$
 $\Rightarrow \triangle DBC$ echilateral pentru că $BC = BD = CD = a\sqrt{2}$ diagonale în fețele cubului \Rightarrow
 $Aria_{\triangle DBC} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$
- b) $[A'DBC]$ tetraedru regulat $A'D = A'C = A'B = BC = BD = DC = a\sqrt{2} \Rightarrow A'T \perp (BCD)$
 $T =$ centrul cercului circumscris $\triangle BDC$ ($[A'DBC]$ tetraedru regulat)
 $[EDBC]$ piramidă triunghiulară regulată; $\triangle DBC$ echilateral și $DE = EB = EC = a$; \Rightarrow
 $ET \perp (BCD)$; $T =$ centrul cercului circumscris $\triangle BDC$ dar și $A'T \perp (BCD)$
 $\Rightarrow A', T, E$ coliniare2 puncte
 $\Rightarrow \sphericalangle(A'T, (ABC)) = \sphericalangle(A'E, AE) = \sphericalangle(A'EA)$ $AE =$ proiecția lui $A'E$ pe (ABC)
 $\text{tg } \sphericalangle(A'EA) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;1 punct
- c) $(A', (DBC)) = A'T$ $T =$ centrul cercului circumscris $\triangle BDC$ echilateral $\Rightarrow T =$ centru de





INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

CONSILIUL CONSULTATIV, DISCIPLINA MATEMATICĂ

greutate $\triangle BDC$ și $A'E \cap DO = \{T\}$; DO = mediană în $\triangle DBC$

$$\triangle A'TD \sim \triangle ETO \Rightarrow \frac{A'T}{TE} = \frac{A'D}{OE} = \frac{2}{1} \Rightarrow A'T = 2TE, A'E = 3TE = a\sqrt{3} \Rightarrow A'T = \frac{2a\sqrt{3}}{3};$$

$\Rightarrow d(A', (DBC)) = A'T = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ (se poate calcula distanța și ca înălțime în $[A'DBC]$ tetraedru regulat)2 puncte