

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ - CLASA A X-A**

**SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV**

**Problema 1.** Numerele reale  $a, b, c > 1$  sunt lungimile laturilor unui triunghi. Arătați că:

$$\frac{\log_b^c}{b+c-a} + \frac{\log_c^a}{c+a-b} + \frac{\log_a^b}{a+b-c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

*Supliment Gazeta Matematică nr 9/2023*

Soluție: Cum  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci  $b+c > a, a+c > b, a+b > c$ , deci  $b+c-a > 0, a+c-b > 0, a+b-c > 0$ . Cum  $a, b, c > 1$ , rezultă

$$\log_b^c = \frac{\lg c}{\lg b} > 0, \log_c^a = \frac{\lg a}{\lg c} > 0, \log_a^b = \frac{\lg b}{\lg a} > 0 \text{ și } \log_b^c \log_c^a \log_a^b = \frac{\lg c}{\lg b} \cdot \frac{\lg a}{\lg c} \cdot \frac{\lg b}{\lg a} = 1, \text{ rezultă}$$

$$\frac{\log_b^c}{b+c-a}, \frac{\log_c^a}{c+a-b}, \frac{\log_a^b}{a+b-c} > 0. \dots\dots\dots 2p.$$

Aplicăm inegalitatea mediilor  $M_a \geq M_g$ ,  $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}, (\forall) x, y, z \geq 0$ .

$$\sum_{cyc} \frac{\log_b^c}{b+c-a} \geq 3\sqrt[3]{\prod_{cyc} \frac{\log_b^c}{b+c-a}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\prod_{cyc} (b+c-a)}}, \dots\dots\dots 2p$$

$$\sum_{cyc} \frac{\log_b^c}{b+c-a} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\prod_{cyc} (b+c-a)}} \geq \frac{3}{\frac{\sum_{cyc} (b+c-a)}{3}} = \frac{9}{a+b+c}, \text{ rezultă}$$

$$\sum_{cyc} \frac{\log_b^c}{b+c-a} \geq \frac{9}{a+b+c}, \dots\dots\dots 3p.$$

**Problema 2.** Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  cu  $|z_1|=5, |z_2|=12, |z_3|=13$  și  $z_1+z_2+z_3=0$ . Aflați lungimile laturilor triunghiului cu vârfurile de afixe  $z_1, z_2, z_3$ .

*Prof. Carmen și Viorel Botea, Brăila*

Soluție: Fie  $A(z_1), B(z_2), C(z_3) \Rightarrow OA=5; OB=12; OC=13$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \Rightarrow \frac{25}{z_1} + \frac{144}{z_2} - \frac{169}{z_1+z_2} = 0 \Leftrightarrow 25z_2^2 + 144z_1^2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = \pm \frac{12}{5}iz_1 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\arg \frac{12i}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AOB = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA \perp OB \Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow AB = 13. O \text{ este}$$

$$\text{centrul de greutate al } \triangle ABC \Rightarrow OA^2 = \frac{4}{9}ma^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \Leftrightarrow \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\Leftrightarrow 113 = BC^2 - 2AC^2 \quad (1). \quad OB^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} \Leftrightarrow 958 = 2BC^2 - AC^2 \quad (2). \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow AC^2 = \frac{772}{3}$  și  $BC^2 = \frac{1883}{3} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{772}{3}}$  și  $BC = \sqrt{\frac{1883}{3}}$  .....1 punct

**Problema 3.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$(n+1)(n^2+1)(n^3+1) = (n^2 + \frac{n}{3} + 1)^3.$$

*Prof. George-Florin Șerban, Brăila*

Soluție:  $(n+1)(n^2+1)(n^3+1) = (n+1)^2(n^2+1)(n^2-n+1)$ ,  $(n+1)^2, (n^2+1), (n^2-n+1) > 0, \dots, 1p.$

Aplicăm inegalitatea mediilor,

$$\sqrt[3]{(n+1)^2(n^2+1)(n^2-n+1)} \leq \frac{(n+1)^2 + (n^2+1) + (n^2-n+1)}{3} = \frac{3n^2+n+3}{3}, \dots, 3p. \text{ rezultă}$$

$$(n+1)(n^2+1)(n^3+1) \leq (n^2 + \frac{n}{3} + 1)^3, \text{ egalitate are loc pentru, } (n+1)^2 = n^2+1 = n^2-n+1, \text{ deci}$$

$$n=0 \in N, S = \{0\}, \dots, 3p.$$

**Problema 4.** Rezolvați în  $(0, +\infty)$  ecuația:

$$x^{2n+2} + (2n+1)x^{n+1} - (n+1)^2 x^2 - (n+1)x + n(n+1) = \log_n^{\sqrt[n]{\frac{(n+1)x}{x^{n+1}+n}}}, \text{ unde } n \geq 2, n \in N.$$

*Prof. George-Florin Șerban, Brăila*

$$\text{Soluție: } x^{2n+2} + 2nx^{n+1} + x^{n+1} - (n+1)^2 x^2 - (n+1)x + n^2 + n = \frac{1}{n} \log_n^{(n+1)x} - \frac{1}{n} \log_n^{(x^{n+1}+n)} \dots, 1p$$

$$\frac{1}{n} \log_n^{(x^{n+1}+n)} + (x^{n+1}+n)^2 + (x^{n+1}+n) = \frac{1}{n} \log_n^{(n+1)x} + (n+1)^2 x^2 + (n+1)x,$$

$$f(x^{n+1}+n) = f((n+1)x) \dots, 1p$$

unde  $f: (0, \infty) \rightarrow R$ ,  $f(y) = \frac{1}{n} \log_n^y + y^2 + y$ , este strict crescătoare deci este injectivă, .....2p

rezultă  $x^{n+1} + n = (n+1)x$ . Aplicăm inegalitatea mediilor,

$$x^{n+1} + n = x^{n+1} + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_n \geq (n+1) \sqrt[n]{x^{n+1} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_n} = (n+1) \sqrt[n]{x^{n+1}} = (n+1)x \dots, 1p$$

$$x^{n+1} + n \geq (n+1)x, (\forall) x > 0, \text{ egalitate are loc pentru } x=1 \in (0, \infty), S = \{1\} \dots, 2p.$$