

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ - CLASA A XI-A**

**SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV**

**Problema 1.** Se consideră matricea  $A \in M_2(\mathbb{Z})$  astfel încât  $\det A = 9$ . Arătați că  $\det(A^2 + 5A + 9I_2)$  este un pătrat perfect.

*,Supliment Gazeta Matematică nr 11\2023*

**Soluție:** Aplicăm teorema lui Hamilton-Cayley,  $A^2 - (TrA)A + (\det A)I_2 = O_2$ , rezultă  
 $A^2 + 9I_2 = (TrA)A$ .  $Tr(A) \in \mathbb{Z}$ ,  $[Tr(A) + 5] \in \mathbb{Z}$ ,  $[3Tr(A) + 15] \in \mathbb{Z}$ , deoarece  $A \in M_2(\mathbb{Z})$ , .....2p.  
 $\det(A^2 + 5A + 9I_2) = \det[(TrA)A + 5A] = \det[(Tr(A) + 5)A] = (Tr(A) + 5)^2 \det A = 9(Tr(A) + 5)^2$ , ...4p  
 $\det(A^2 + 5A + 9I_2) = [3Tr(A) + 15]^2$  este un pătrat perfect. ....1p

**Problema 2.** Fie șirul cu termenul general,  $a_n = \frac{(2n+1) \cdot (n^2 - 2n + 2)}{(n^2 + 1) \cdot (n^4 + 4)}$ ,  $(\forall) n \geq 1$ .

a) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ .

b) Să se demonstreze inegalitatea:  $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) < \sqrt{e}$ .

*Prof. George-Florin Șerban, Brăila*

**Soluție:**  $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$   
 $\frac{(2x+1) \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 1) \cdot (x^4 + 4)} = \frac{(2x+1) \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 2)} = \frac{2x+1}{(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2x + 2)}$ , .....1p  
 $\frac{(2x+1) \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 1) \cdot (x^4 + 4)} = \frac{(x^2 + 2x + 2) - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2x + 2)} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x+1)^2 + 1}$ , .....1p  
 $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k^2 + 1} - \frac{1}{(k+1)^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2}$ , .....2p.  
Folosim inegalitatea  $\ln(1+x) \leq x$ ,  $(\forall) x > 0$ , .....1p  
 $\ln \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k) \leq \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k^2 + 1} - \frac{1}{(k+1)^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1} < \frac{1}{2} = \ln \sqrt{e}$ ,  
rezultă  $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ , .....2p

**Problema 3.** Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  definit astfel:  $a_0 = 0, a_{n+1} = e^{a_n} + 1, (\forall) n \in N$ . Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1}}{a_n}.$$

*Prof. Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila*

Soluție: Folosim inegalitatea  $e^x \geq x+1, (\forall) x \in R$ .  $a_{n+1} - a_n = e^{a_n} - a_n + 1 \geq a_n + 1 - a_n + 1 = 2 > 0$ ,  $a_{n+1} > a_n, (\forall) n \in N$ , deci șirul este strict crescător și există  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Dacă  $a \in R$ , trecem la limită în relația de recurență și obținem,  $a = e^a + 1$ , fals, deoarece  $a = e^a + 1 \geq a + 1 + 1 = a + 2$ . Demonstrăm prin inducție matematică  $P(n) : a_n \geq 0, (\forall) n \in N$ .

I.  $P(0) : a_0 = 0 \geq 0$ , adevărat.

II.  $P(k) \Rightarrow P(k+1), P(k+1) : a_{k+1} \geq 0, (\forall) n \in N$ .  $a_{k+1} = e^{a_k} + 1 > 0 + 1 = 1 \geq 0$ , adevărat. Rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \dots \dots \dots 3p$$

Demonstrăm inegalitatea  $a_{n+1} \leq e^{a_n+1}, (\forall) n \in N$ . Rezultă  $e^{a_n} + 1 \leq e^{a_n+1}, e^{a_n}(e-1) \geq 1$ , adevărat deoarece  $e^{a_n} \geq e^0 = 1$  și  $e-1 \geq 1$ , adică  $e \geq 2$ , adevărat. Demonstrăm inegalitatea  $a_{n+1} > e^{a_n}, (\forall) n \in N$ .

$a_{n+1} = e^{a_n} + 1 > e^{a_n}, (\forall) n \in N$ , adevărat. Am demonstrat că  $e^{a_n} < a_{n+1} \leq e^{a_n+1}, (\forall) n \in N$ , rezultă

$$\ln e^{a_n} < \ln a_{n+1} \leq \ln e^{a_n+1}, a_n < \ln a_{n+1} \leq a_n + 1, 1 < \frac{\ln a_{n+1}}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}, (\forall) n \in N^*, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{a_n}) = 1, \text{ din}$$

criteriul cleștelui, rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1}}{a_n} = 1, \dots \dots \dots 4p$

**Problema 4.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 2023 & 2024 & 2024 \\ 2024 & 2023 & 2024 \\ 2024 & 2024 & 2023 \end{pmatrix}$ . Demonstrați că  $Tr(A^{2024} - I_3) : 2024$ .

*Prof. George-Florin Șerban, Brăila*

Soluție: Fie matricele  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, BC = CB = O_3$ . Scriem  $A = aB + bC$ ,

$a, b \in R$ , rezultă  $2a + b = 2023, -a + b = 2024$ , deci  $a = \frac{-1}{3}, b = \frac{6071}{3}$ .  $B^2 = 3B, C^2 = 3C$ , prin calcul

direct. Se demonstrează ușor prin metoda inducției matematice că  $B^n = 3^{n-1}B, C^n = 3^{n-1}C, \dots \dots \dots 2p$

Aplicăm binomul lui Newton la matrice,  $A^n = (\frac{-1}{3}B + \frac{6071}{3}C)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\frac{-1}{3}B)^{n-k} (\frac{6071}{3}C)^k,$

$$A^n = (\frac{-1}{3}B)^n + (\frac{6071}{3}C)^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (\frac{-1}{3}B)^{n-k} (\frac{6071}{3}C)^k = \frac{(-1)^n}{3^n} 3^{n-1}B + \frac{(6071)^n}{3^n} 3^{n-1}C +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (\frac{-1}{3})^{n-k} (\frac{6071}{3})^k B^{n-k-1} (BC) C^{k-1} = \frac{(-1)^n}{3} B + \frac{(6071)^n}{3} C = A^n, A^{2024} = \frac{1}{3}B + \frac{6071^{2024}}{3}C, \dots 3p$$

$$Tr(A^{2024} - I_3) = Tr(A^{2024}) - Tr(I_3) = 2 + 6071^{2024} - 3 = (M_{2024} - 1)^{2024} - 1 = M_{2024} + 1 - 1 = M_{2024} : 2024, \dots 2p$$