

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A XII-A**

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Calculați $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx$.

Gazeta Matematică nr 10/2023

Soluție. $(\frac{1}{x+3})' = \frac{-1}{(x+3)^2}$. Aplicăm formula integrării prin părți:

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = -\int (\frac{1}{x+3})' \cdot (x^3 \cdot e^x) dx = \frac{-x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int (\frac{1}{x+3}) \cdot (x^3 \cdot e^x)' dx = \frac{-x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int \frac{3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x}{x+3} dx, \dots 1p$$

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = \frac{-x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int \frac{x^2 \cdot e^x \cdot (x+3)}{x+3} dx = \frac{-x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int x^2 \cdot e^x dx = \frac{-x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int x^2 \cdot (e^x)' dx, \dots 1p$$

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = \frac{-x^3 \cdot e^x}{x+3} + x^2 \cdot e^x - \int (x^2)' \cdot e^x dx = \frac{-x^3 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x}{x+3} - 2 \int x \cdot e^x dx, \dots 2p$$

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = \frac{3x^2 \cdot e^x}{x+3} - 2 \int x \cdot (e^x)' dx = \frac{3x^2 \cdot e^x}{x+3} - 2x \cdot e^x + 2 \int x' \cdot e^x dx, \dots 1p$$

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = \frac{3x^2 \cdot e^x - 2x^2 \cdot e^x - 6x \cdot e^x}{x+3} + 2 \int e^x dx = \frac{x^2 \cdot e^x - 6x \cdot e^x}{x+3} + 2e^x + c = \frac{x^2 \cdot e^x - 6x \cdot e^x + 2x \cdot e^x + 6e^x}{x+3} + c,$$

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = \frac{x^2 \cdot e^x - 4x \cdot e^x + 6e^x}{x+3} + c, \dots 2p \text{ unde } c \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. Pe $M = (0, \infty)$ se definește o lege de compoziție astfel încât

$$x * \frac{1}{y} = y^2(x * y), x * \frac{2}{y} = \frac{y^2}{2}(x * y) \text{ și } (x * y)(x * 64y) = (\frac{x^2 + 1}{32xy})^2, \text{ oricare ar fi } x, y \in M. \text{ Să se}$$

studieze asociativitatea, comutativitatea și existența elementului neutru pentru această lege de compoziție.

Prof. Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție. Din $x * \frac{2}{y} = \frac{y^2}{2}(x * y)$, $y \rightarrow 2y \Rightarrow x * \frac{1}{y} = 2y^2(x * 2y) \Rightarrow y^2(x * y) = 2y^2(x * 2y)$

$\Rightarrow x * y = 2(x * 2y), (\forall)x, y \in M$. Demonstrăm prin inducție matematică

$P(n): x * y = 2^n(x * 2^n y), (\forall)n \in \mathbb{N}$. I. $P(0): x * y = x * y$, adevărat. II. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

$P(k+1): x * y = 2^{k+1}(x * 2^{k+1} y)$. $2^{k+1}(x * 2^{k+1} y) = 2^{k+1}(x * 2 \cdot (2^k y)) = 2^{k+1} \cdot \frac{x * (2^k y)}{2} = 2^k(x * (2^k y))$

$= x * y$, adevărat. Rezultă $x * y = 64(x * 64y)$, dar $(x * y)(x * 64y) = \left(\frac{x^2 + 1}{32xy}\right)^2$, $\left(\frac{x * y}{8}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + 1}{32xy}\right)^2$,

$\frac{x * y}{8}, \frac{x^2 + 1}{32xy} > 0$, deci $\frac{x * y}{8} = \frac{x^2 + 1}{32xy}$, $x * y = \frac{x^2 + 1}{4xy}$, $(\forall)x, y \in M$,2p

Dacă $x * y = y * x$, rezultă $\frac{x^2 + 1}{4xy} = \frac{y^2 + 1}{4xy}$, adică $x = y$, deci legea de compoziție nu este comutativă,1p

$(1 * 1) * 2 = \frac{1}{2} * 2 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4} = \frac{5}{16}$, $1 * (1 * 2) = 1 * \frac{1}{4} = 2$, rezultă $(1 * 1) * 2 \neq 1 * (1 * 2)$, deci legea de compoziție nu este asociativă,2p

Presupunem că legea de compoziție are un element neutru $e \in M$, cu $x * e = x$, $\frac{x^2 + 1}{4xe} = x$,
 $x^2 + 1 = 4x^2e$, $(1 - 4e)x^2 + 1 = 0$, $(\forall)x > 0$, fals, rezultă că legea de compoziție nu are element neutru,2p

Problema 3. Fie (G, \cdot) un grup abelian finit, $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, în care ecuația $t^3 = e$, are soluție unică, e fiind elementul neutru al grupului (G, \cdot) . Arătați că există $b_1, b_2, \dots, b_n \in G$, cu $b_1^3 a_1 = e, b_2^3 a_2 = e, \dots, b_n^3 a_n = e$. Calculați $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^4$.

Prof. Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. $e^3 = e$, deci unica soluție a ecuației $t^3 = e$ este $t = e$. Adică din $t^3 = e \Rightarrow t = e$. Fie funcția $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^3$. Dacă $f(x) = f(y)$, $x, y \in G$, $x^3 = y^3$, $x^3(y^3)^{-1} = e$, $(xy^{-1})^3 = e$, rezultă $xy^{-1} = e$, $x = y$, rezultă că funcția f este injectivă, dar mulțimea G , este finită rezultă că funcția f este surjectivă, adică $(\forall)y \in G, (\exists)x \in G$, cu $f(x) = y$,2p

Dacă $y = a_1^{-1} \in G$, $(\exists)x = b_1 \in G$, cu $f(x) = y$, $b_1^3 = a_1^{-1}$, adică $b_1^3 a_1 = e$. Dacă $y = a_2^{-1} \in G$,
 $(\exists)x = b_2 \in G$, cu $f(x) = y$, $b_2^3 = a_2^{-1}$, adică $b_2^3 a_2 = e$ Dacă $y = a_n^{-1} \in G$, $(\exists)x = b_n \in G$, cu
 $f(x) = y$, $b_n^3 = a_n^{-1}$, adică $b_n^3 a_n = e$,1p

Dacă pentru $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$ $b_i = b_j$, rezultă $b_i^3 a_i = e, b_j^3 a_j = e$, rezultă $a_i = a_j$, fals, rezultă că pentru $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$ $b_i \neq b_j$, $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, deci $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$,2p

Înmulțim cele n ecuații, $b_1^3 a_1 b_2^3 a_2 \cdot \dots \cdot b_n^3 a_n = e$, $(b_1^3 b_2^3 \cdot \dots \cdot b_n^3) \cdot (a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = e$,

$(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n)^3 \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = e$,

$(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^3 \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^4 = e$,2p

Problema 4. Fie $0 < a < b \leq 1$. Să se arate că $\int_{\frac{a+b}{8\sqrt{ab}}}^{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}} \frac{dx}{\sqrt{(a+b)x - 2\sqrt{ab}x^2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12^4\sqrt{ab}}$.

Prof. George-Florin Șerban, Brăila

Soluție: $u(x) = \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{ab}x}{a+b}}, u'(x) = \frac{-2\sqrt{ab(a+b)}}{2(a+b)\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}x}}, 0 \leq \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{ab}x}{a+b}} \leq 1,$

$$\frac{2\sqrt{ab}x}{a+b} \leq \frac{a+b}{2(a+b)} = \frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{ab}x}{a+b} \geq 0, (\arcsin(u(x)))' = \frac{-\sqrt{ab(a+b)}}{(a+b)\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{ab}x}{a+b}}}, \dots, 3p$$

$$(\arcsin(u(x)))' = \frac{-\sqrt{ab(a+b)^2}}{\sqrt{2\sqrt{ab}x(a+b)}\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}x}} = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt[4]{ab}\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}x}} = \frac{-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{2}\sqrt{(a+b)x - 2\sqrt{ab}x^2}},$$

$$\int_{\frac{a+b}{8\sqrt{ab}}}^{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}} \frac{dx}{\sqrt{(a+b)x - 2\sqrt{ab}x^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{ab}} \int_{\frac{a+b}{8\sqrt{ab}}}^{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}} (\arcsin(u(x)))' dx = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{ab}} \cdot [\arcsin(u(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}})) - \arcsin(u(\frac{a+b}{8\sqrt{ab}}))],$$

$$\int_{\frac{a+b}{8\sqrt{ab}}}^{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}} \frac{dx}{\sqrt{(a+b)x - 2\sqrt{ab}x^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{ab}} \cdot (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{12^4\sqrt{ab}}, \dots, 4p$$