



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024**  
**CLASA a VIII-a**  
**BAREM DE CORECARE ȘI NOTARE**

**SUBIECTUL I (7puncte)**

Fie  $E(x) = (2x - 3)^2 - (x - 3)(x + 3) - 2(x - 1)^2 + 8$ .

- a) Aflați cel mai mare număr natural  $a$  cu proprietatea că  $E(x) \geq a$ ; pentru orice număr real  $x$ ;  
 b) Aflați  $x \in \mathbb{Z}$  pentru care  $E(x) \leq 9$ .

**Soluție:**

- a)  $E(x) = 8x^2 - 8x + 24$  ..... 1p  
 $E(x) = (x - 4)^2 + 8$  ..... 1p  
 $E(x) \geq 8, a = 8$  ..... 1p  
 b)  $(x - 4)^2 + 8 \leq 9 \Rightarrow (x - 4)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 4 \leq 1$  ..... 1p  
 Finalizare.....2p  
 Oficiu..... 1p

**SUBIECTUL II (7puncte)**

Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere reale, arătați că:

- a)  $a^2 - ab + b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ;  
 b)  $\sqrt{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ,  
 oricare ar fi  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \geq 2$ .

**Soluție:**

- a) Relația din enunț este echivalentă cu  $(a - b)^2 \geq 0$  (A) ..... 2p  
 b) Se aplică a) pentru fiecare termen, se obține  $\sqrt{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2} \geq \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  
 $\sqrt{x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2} \geq \frac{x_2 + x_3}{2}, \dots, \sqrt{x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2} \geq \frac{x_n + x_1}{2}$  .....2p  
 Adunând relațiile, se obține inegalitatea de la b) ..... 1p  
 Oficiu ..... 1p

**SUBIECTUL III (7puncte)**

Se consideră cubul  $ABCDEFGH$ .

- a) Arătați că  $EC \perp (GBD)$ ;  
 b) Dacă  $AB=a$ , aflați distanța de la punctul E la planul  $(GBD)$ .

**Soluție:**

- a)  $EC \perp BD$  ..... 1p



EC $\perp$ BG .....	1p
Finalizare .....	1p
b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$ , $EC \cap (GBD) = EC \cap GO = \{Q\}$ , Q este centrul de greutate al triunghiului GBD, $d(E, (GBD)) = EQ$ .....	1p
Calculează $EQ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .....	2p
Oficiu .....	1p

**SUBIECTUL IV (7puncte)**

Piramida patrulateră regulată VABCD are vârful V. Fie M mijlocul muchiei AD și E punctul de intersecție a dreptelor AC și BM. Demonstrați că triunghiurile VAC și EAV sunt asemenea dacă și numai dacă unghiul format de dreapta VE cu planul VBD are măsura de  $30^\circ$ .

(Gazeta Matematică)

Soluție:

$pr_{(VBD)} VE = VO$ , unde $\{O\} = AC \cap BD$ , $\Rightarrow \angle(VE, (VBD)) = \angle EVO$ .....	1p
„ $\Rightarrow$ ”	
$\Delta VAC \sim \Delta EAV \Rightarrow AV \equiv VE$ .....	1p
E este centru de greutate al $\Delta ABD \Rightarrow OE = \frac{1}{2} \cdot AE = \frac{1}{2} VE$ .....	1p
Arată că $\angle EVO = 30^\circ$ prin urmare, $\angle(VE, (VBD)) = 30^\circ$ .....	1p
„ $\Leftarrow$ ”	
$\angle(VE, (VBD)) = 30^\circ$ , rezultă că $\angle EVO = 30^\circ$ , de unde $OE = \frac{1}{2} VE$ , dar $OE = \frac{1}{2} \cdot AE$ (E este centru de greutate al $\Delta ABD$ ) $\Rightarrow AV \equiv VE$ .....	1p
Arată că $\Delta VAC \sim \Delta EAV$ .....	1p
Oficiu .....	1p

Notă:

- Timp de lucru 3 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii.