

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

9 februarie 2025

CLASA a IX-a

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

Subiectul 1. În trapezul ABCD, bazele $AB=a$, $CD=b$ și $M \in [AD]$ astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{a}{b}$. Dacă $MN \parallel AB$ și $N \in [BC]$, atunci arătați că $(a+b) \cdot \overrightarrow{MN} = 2b \cdot \overrightarrow{AB}$ (a, b numere reale pozitive).

Soluție: $\frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{b}{a} \Rightarrow a \cdot \overrightarrow{DC} = b \cdot \overrightarrow{AB}$ 2p

$MN \parallel AB \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{a}{b}$ 1p

$\overrightarrow{MN} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{MC} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{MB} = \frac{a}{a+b} (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + \frac{b}{a+b} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})$ 2p

Finalizând calculele, se obține $\overrightarrow{MN} = \frac{2b}{a+b} \overrightarrow{AB} \Rightarrow (a+b) \cdot \overrightarrow{MN} = 2b \cdot \overrightarrow{AB}$ 2p

Subiectul 2. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b, c, x, y, z cu $a+b+c=x+y+z$ și $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$. Dacă $\max\{a, b, c\} \leq \max\{x, y, z\}$, arătați că $\min\{a, b, c\} \leq \min\{x, y, z\}$

Soluție: Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $x \leq y \leq z$, $a \leq b \leq c$ 1p

Din $\max\{a, b, c\} \leq \max\{x, y, z\}$, există u pozitiv $z=c+u$ 1p

Presupunem prin reducere la absurd că $\min\{a, b, c\} > \min\{x, y, z\}$. Atunci există $t > 0$ cu $a = t+x$. Din $a+b+c = x+y+z$ și $x^2+y^2+z^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 0$ obținem prin $y=b-u+t$, că $t^2 - 2at + u^2 + 2uc + (t-u)^2 - 2bu + 2bt = 0$, de unde $t^2 + u^2 + (t-u)^2 + 2u(c-b) + 2t(b-a) = 0$ 3p

Egalitatea are loc pentru numerele pozitive, doar dacă $a=b=c$ și $t=u=0$ (Fals) de unde, concluzia.....2p

Subiectul 3. Determinați numărul natural N , unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x , iar

$$N = \left[\sqrt{2025^2 - 2025} \right] + \left[\sqrt{2025^2 - 2024} \right] + \dots + \left[\sqrt{2025^2 + 2024} \right] + \left[\sqrt{2025^2 + 2025} \right]$$

Soluție: Cum $2024^2 \leq 2025^2 - k \leq 2025^2$, pentru k între 1 și 2025, avem $\left[\sqrt{2025^2 - k} \right] = 2024$ 3p

Analog, $2025^2 \leq 2025^2 + p \leq 2026^2$, pentru p între 0 și 2025, avem $\left[\sqrt{2025^2 + p} \right] = 2025$ 3p

Finalizând $N = 2025 \cdot 2024 + 2026 \cdot 2025 = 2 \cdot 2025^2$ 1p

Subiectul 4. În sistemul de coordonate (XOY) se consideră $A(0, \sqrt{m^2 + n^2})$, $B(m, -n)$ și

$C(-m, -n)$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC , determinați în funcție de numerele reale pozitive m și n , coordonatele vectorului $\vec{u} = \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC}$.

Soluție: Cum $OA = OB = OC = \sqrt{m^2 + n^2}$ astfel O este centrul cercului circumscris.....2p

Folosind relația lui Sylvester $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ avem prin prelucrare că vectorul căutat

$\vec{u} = \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = -2\vec{OH} = -2(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ 3p

Finalizând calculele, obținem $\vec{u}(0, 4n - 2\sqrt{m^2 + n^2})$ 2p