

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală- clasa a XI -a
9 februarie 2025****Subiectul I**

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA) \cdot x + \det A, \forall x \in \mathbb{C}$, unde TrA reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A .

b) Dacă $TrA = 2$ și $\det A = 3$, atunci $2\det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4$.

Subiectul al II-lea

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ pentru care $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + x_n^2}}{x_n}, \forall n \geq 0$.

a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$.

b) Determinați $x_0 > 0$ pentru care șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_n = 2^n(x_n - \sqrt{3})$ este convergent.

(G.M. nr.10/2024)

Subiectul al III-lea

Să se calculeze :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^3 - 1)}{\sqrt[2024]{5 - 4x} - 1}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3n+5)^{x^2} - 1}{x^3 + 2x^2}}$.

Subiectul al IV-lea

Fie $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, astfel încât $B^2 \neq O_3$, $B^4 = O_3$ și $A = B^2 + 2I_3$.

a) Să se arate că $A^p = 2^p \cdot I_3 + p \cdot 2^{p-1} \cdot B^2$, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că, pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, matricea $A^p - A^{p-1}$ este inversabilă.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.

Timp de lucru: 3 ore