

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală- clasa a VI -a****9 februarie 2025****Barem evaluare și de notare****Subiectul I**

Fie mulțimea $A = \{3, 6, 9, \dots, 2025\}$. Se consideră șirul de submulțimi $A_1 = \{3, 6\}$, $A_2 = \{9, 12, 15\}$, $A_3 = \{18, 21, 24, 27\}$ Calculați suma elementelor mulțimii A_{24} .

Soluție și barem :

Card $A_1=2$, card $A_2=3$,..., card $A_n = n+1$ (1p)

Card $A_{24} = 25$ (1p) ; Mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n sunt disjuncte (1p)

card $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{23}) = 24 \cdot 25 : 2 - 1 = 299$. (1p).

Obținem $A_{24} = \{3 \cdot 300, 3 \cdot 301, \dots, 3 \cdot 324\} = \{900, 903, 906, \dots, 972\}$. (1p).

$S = 3 \cdot 300 + 3 \cdot 301 + \dots + 3 \cdot 324 = 3 \cdot (300 + 301 + \dots + 324) = 3 \cdot (324 \cdot 325 : 2 - 299 \cdot 300 : 2) = 23400$
(2p)

Subiectul al II-lea

1. a) Arătați că numărul $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2025} + (1 + 3 + 5 + \dots + 2025)$ este divizibil cu 4.

b) Determinați numerele naturale $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, știind că numerele $n^2, 2n^2, 3n^2$, respectiv $5n^2$ au 105, 120, 126, respectiv 140 de divizori naturali.

S.G.M. 11/ 2024

Soluție și barem :

$$a) \quad 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2025} = 3 + 2^2(1 + 2 + \dots + 2^{2023}) = \mathcal{M}_4 + 3 \quad (1p)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2025 = 1013^2 = \mathcal{M}_4 + 1 \quad (1p)$$

$$\text{Deci, } n = \mathcal{M}_4 \Leftrightarrow n : 4 \quad (1p)$$

$$b) n^2 = 2^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot 5^{2c}; \quad 2n^2 = 2^{2a+1} \cdot 3^{2b} \cdot 5^{2c}; \quad 3n^2 = 2^{2a} \cdot 3^{2b+1} \cdot 5^{2c}; \quad 5n^2 = 2^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot 5^{2c+1}$$

(1p)

$$n^2 \text{ are 105 divizori} \Rightarrow (2a + 1)(2b + 1)(2c + 1) = 105$$

$$2n^2 \text{ are 120 divizori} \Rightarrow (2a + 2)(2b + 1)(2c + 1) = 120$$

$$3n^2 \text{ are 126 divizori} \Rightarrow (2a + 1)(2b + 2)(2c + 1) = 126$$

$$5n^2 \text{ are 140 divizori} \Rightarrow (2a + 1)(2b + 1)(2c + 2) = 140 \quad (1p)$$

$$\frac{2a+1}{2a+2} = \frac{105}{120} \Rightarrow a = 3; \quad \frac{2b+1}{2b+2} = \frac{105}{126} \Rightarrow b = 2; \quad \frac{2c+1}{2c+2} = \frac{105}{140} \Rightarrow c = 1; \quad (1p)$$

$$n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360 \quad (1p)$$

Subiectul al III-lea

Fie unghiurile adiacente suplementare AOB și BOC direct proporționale cu 3 și 6, și semidreapta (OE este bisectoarea unghiului BOC, iar unghiurile AOG, GOF și FOC sunt invers proporționale cu 2, 3 și 6. Se știe că punctele B și G sunt de o parte și de alta a dreptei AC. Dacă semidreapta (OM este opusa semidreptei (OE, iar semidreapta (ON este bisectoarea unghiului GOF, arătați că (OG este bisectoarea unghiului MON.

Soluție și barem :

$$(\angle AOB, \angle BOC) \text{ d.p.}(3,6) \Rightarrow \frac{\angle AOB}{3} = \frac{\angle BOC}{6}, \angle AOB \text{ și } \angle BOC \text{ suplementare} \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ, \angle BOC = 120^\circ.$$

(1p)

$$(\text{OE bis. } \angle BOC \Rightarrow \angle BOE = \angle EOC = \frac{1}{2} \cdot \angle BOC = 60^\circ) \text{ (1p)}$$

$$(\angle AOG, \angle GOF, \angle FOC) \text{ i.p.}(2, 3, 6) \Rightarrow 2 \cdot \angle AOG = 3 \cdot \angle GOF = 6 \cdot \angle FOC; \angle AOG + \angle GOF + \angle FOC = 180^\circ \text{ (1p)} \Rightarrow \angle AOG = 90^\circ; \angle GOF = 60^\circ; \angle FOC = 30^\circ \text{ (1p)}$$

$$(\text{ON bis. } \angle GOF \Rightarrow \angle GON = \angle NOF = \frac{1}{2} \cdot \angle GOF = 30^\circ) \text{ (1p)}$$

$$\text{Semidreptele (OE și (OM opuse} \Rightarrow \angle EOM = 180^\circ; \angle MOA + \angle AOB + \angle BOE = 180^\circ \text{ (1p)} \Rightarrow \angle AOM = 60^\circ; \angle AOG = 90^\circ \Rightarrow \angle MOG = 30^\circ = \angle GON \Rightarrow (\text{OG este bis. } \angle MON \text{ (1p)}$$

Subiectul al IV-lea

Fie punctele $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2025}$, situate în această ordine pe o dreaptă, astfel încât: $A_0A_1 = A_1A_2 = 1 \text{ cm}$ și $A_kA_{k+1} = 2 \cdot A_{k-1}A_k, \forall k \in \{2, 3, 4, 5, \dots, 2025\}$.

- Arată că A_4 este mijlocul segmentului A_0A_5 ;
- Calculează lungimea segmentului A_0A_{2025}

Soluție și barem:

- A_4 este mijlocul segmentului A_0A_5 dacă $A_0A_4 = A_4A_5$ (1p)

$$A_0A_4 = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 \text{ (1p)}$$

$$A_2A_3 = 2 \cdot A_1A_2 = 2 \text{ cm}, A_3A_4 = 2 \cdot A_2A_3 = 4 \text{ cm}, A_4A_5 = 2 \cdot A_3A_4 = 8 \text{ cm} \text{ (1p)}$$

$$A_0A_4 = 1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm} \text{ (1p)}$$

- $A_0A_{2025} = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \dots + A_{2024}A_{2025}$ (1p)

$$\text{Observăm că: } A_2A_3 = 2^1 \text{ cm}, A_3A_4 = 2^2 \text{ cm}, A_4A_5 = 2^3 \text{ cm}, \dots, A_{2024}A_{2025} = 2^{2023} \text{ cm} \text{ (1p)}$$

$$A_0A_{2025} = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023} = \dots = 2^{2024} \text{ cm} \text{ (1p)}$$