

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, Satu Mare, 8 februarie 2025
CLASA a V-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Un grup de turiști intenționează să facă o excursie, în Delta Dunării, având la dispoziție mai multe bărci. Dacă se așează câte 4 turiști într-o barcă, atunci 3 turiști vor rămâne pe mal. Dacă în fiecare barcă se așează câte 5 turiști, o barcă va rămâne nefolosită, iar într-una din bărcile folosite vor fi doar 3 turiști. Câți turiști sunt în grup și câte bărci au fost puse la dispoziția acestora?

1.	Rezolvare	Punctaj
	Metoda I:	
	În prima situație avem: $\underbrace{4p}_{b_1} \underbrace{4p}_{b_2} \underbrace{4p}_{b_3} \underbrace{4p}_{b_4} \dots \underbrace{4p}_{b_n} p p p$	2p
	În a doua situație avem o barcă nefolosită și în una dintre ele sunt doar 3 persoane, ceea ce înseamnă că eliberăm o barcă din cele ocupate cu persoane și mai scoatem o persoană dintr-o barcă pentru a avea o barcă cu 3 persoane. Vom avea în total $3 + 4 + 1 = 8$ persoane nerepartizate.	2p
	Pentru ca în fiecare barcă să avem 5 persoane trebuie să repartizăm câte una din cele 8 persoane rămase nerepartizate ceea ce înseamnă că avem $8 + 1$ (barca goală) + 1 (barca având 3 persoane) = 10 bărci.	2p
	Avem în total $10 \cdot 4 + 3 = 43$ persoane.	1p
	Metoda a II-a:	
	Notăm cu b numărul de bărci. În prima situație avem $4 \cdot b + 3$ persoane.	2p
	În a doua situație avem $5 \cdot (b-2) + 3$ persoane.	2p
	Se obține $4 \cdot b + 3 = 5 \cdot (b-2) + 3$, deci $b = 10$ bărci	2p
	și $10 \cdot 4 + 3 = 43$ persoane.	1p

Problema 2.

Fie numărul $A = 5^{2n+1} \cdot 28^{n+1} + 2^{2n} \cdot 35^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 7^{n+3} \cdot 10^{2n}$, unde n este un număr natural nenul.

a) În câte zerouri se termină numărul A ?

b) Care este ultima cifră nenulă a numărului A , știind că n este un număr natural nenul care dă restul 0 la împărțirea la 4?

2.	Rezolvare	Punctaj
a)	$A = 10^{2n} \cdot 7^{n+1} \cdot 94$	2p
	Numărul A se termină în $2n$ zerouri.	2p
b)	Dacă n este un număr natural nenul care dă restul 0 la împărțirea la 4, atunci ultima cifră a lui 7^{n+1} este 7.	2p
	Ultima cifră nenulă a numărului A este 8.	1p

Problema 3.

- a) Arătați că numărul $N = 12 \cdot 3^{2025} + 3^{2027} + 3^{2028}$ este pătrat perfect.
- b) Arătați că numărul $A = 4^{30} + 7^{30} + 2^{2025}$ nu este pătrat perfect.

3.	Rezolvare	Punctaj
a)	$N = 12 \cdot 3^{2025} + 3^{2027} + 3^{2028} \Rightarrow N = 3^{2025}(12 + 9 + 27)$	1p
	$N = 3^{2025} \cdot 48 = 3^{2025} \cdot 3 \cdot 16$	1p
	$\Rightarrow N = 3^{2026} \cdot 4^2 = (3^{1013})^2 \cdot 4^2 = (3^{1013} \cdot 4)^2$, adică pătrat perfect	1p
b)	$U(4^{30}) = U(4^2) = 6$, deoarece $30:4 = 7$ rest 2	1p
	$U(7^{30}) = U(7^2) = 9$, deoarece $30:4 = 7$ rest 2	1p
	$U(2^{2025}) = U(2^1) = 2$, deoarece $2025:4 = 506$ rest 1	1p
	Deci, $U(4^{30} + 7^{30} + 2^{2025}) = U(6 + 9 + 2) = 7$, iar un număr care are ultima cifră 7 nu este pătrat perfect.	1p

Problema 4.

Determinați numerele naturale de forma \overline{abcd} , știind că \overline{ab} împărțit la \overline{cd} dă restul 31, iar \overline{cd} împărțit la \overline{ab} dă restul 2.

Gazeta Matematică nr. 9/2024

4.	Rezolvare	Punctaj
	$\overline{ab} = \overline{cd} \cdot x + 31, 31 < \overline{cd} \quad (1)$	1p
	$\overline{cd} = \overline{ab} \cdot y + 2, 2 < \overline{ab} \quad (2)$	1p
	Dacă $\overline{ab} < \overline{cd}$, atunci, din (1), se obține $x = 0$ și $\overline{ab} = 31$.	1p
	Pentru $\overline{ab} = 31$, din (2), se obține $\overline{cd} \in \{33, 64, 95\}$.	2p
	Dacă $\overline{cd} < \overline{ab}$, atunci, din (2), se obține $y = 0$ și $\overline{cd} = 2$, imposibil, deoarece trebuie ca $31 < \overline{cd}$, din (1).	1p
	Deci $\overline{abcd} \in \{3133, 3164, 3195\}$.	1p

Notă: Orice rezolvare corectă a unei probleme, diferită de cea din barem, se notează cu 7 puncte.