

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 02.02.2025 –

Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1

Arătați că numerele $a = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3\cdot 4}} + \dots + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2024\cdot 2025}}$ și

$b = \frac{\sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(4-\sqrt{5})^2}}{\sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{6}+5)^2}}$ sunt raționale și apoi comparați a și b .

Soluție:

$$a = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 4}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3\cdot 4}} + \dots + \frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2024\cdot 2025}} - \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{2024\cdot 2025}} \quad 1p$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} \quad 1p$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2025}} - 1 = -\frac{44}{45} \text{ care este rațional; } \quad 1p$$

$$b = \frac{|2\sqrt{3}-\sqrt{5}| - |3-2\sqrt{3}| - |4-\sqrt{5}|}{|2\sqrt{6}-5| \cdot (2\sqrt{6}+5)} \quad 1p$$

$$= \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{5}) - (2\sqrt{3}-3) - (4-\sqrt{5})}{(5-2\sqrt{6})(2\sqrt{6}+5)} = \quad 1p$$

$$= -1 \text{ care este rațional; } \quad 1p$$

$$a > b$$

SUBIECTUL 2

Fie ABCD un paralelogram și E mijlocul laturii BC. Se consideră punctul $F \in DE$, cu D între E și F astfel încât $FB \equiv AB$. Arătați că $\angle ABF = 2 \cdot \angle BFE$.

Suplimentul GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$$\text{Fie } \{M\} = EF \cap AB$$

1p

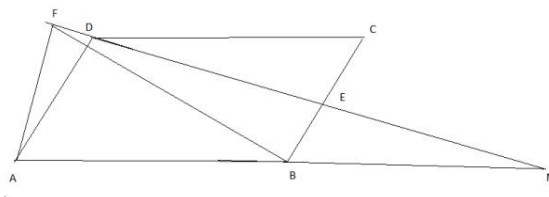
În triunghiul ADM, BE este linie mijlocie

Rezultă $AB \equiv BM$

$AB \equiv BF \Rightarrow BF \equiv BM$

Se deduce că triunghiul BFM este isoscel de
bază FM $\Rightarrow \angle BFM \equiv \angle BMF$

Dar, $\angle ABF$ este unghi exterior triunghiului BMF $\Rightarrow \angle ABF = 2 \cdot \angle BFE$



2p

1p

1p

1p

1p

SUBIECTUL 3

Se consideră suma $S = \sqrt{363} + \sqrt{1452} + \sqrt{3267} + \dots + \sqrt{29403}$.

4p a) Calculați suma S;

3p b) Determinați numerele rationale a și b pentru care $\frac{a}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \frac{b}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = S$.

Soluție:

$$a) S = \sqrt{363} + \sqrt{1452} + \sqrt{3267} + \dots + \sqrt{29403} = (\sqrt{121} + \sqrt{484} + \dots + \sqrt{9801})\sqrt{3} =$$

$$= (11 + 22 + 33 + \dots + 99)\sqrt{3} = 495\sqrt{3}$$

$$b) \frac{a}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \frac{b}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = S \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{3}-1} + \frac{b}{\sqrt{3}+1} = 495\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 990 \end{cases}$$

Se obține $a = b = 495$

SUBIECTUL 4

Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, M mijlocul lui AC iar N mijlocul lui BD . Notăm cu Q intersecția dreptei DM cu AB . Știind că $DM \parallel CN$, arătați că:

4p a) $AB = 3 \cdot CD$

3p b) $AQCD$ este paralelogram.

Soluție:

a) Notez S intersecția lui CN cu AB;

DCSQ paralelogram implică
 $DC=QS$

$\triangle DMC \equiv \triangle QMA$ (ULU) deci
 $DC=AQ$;

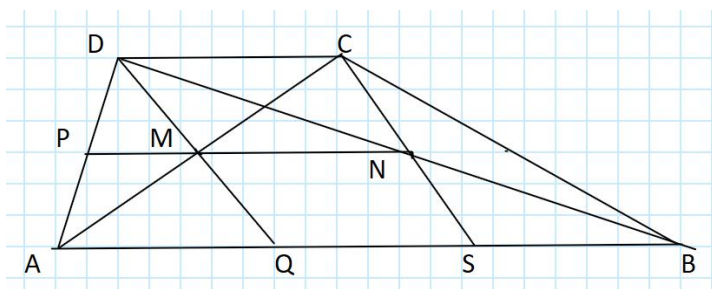
$\triangle DNC \equiv \triangle BNS$ (ULU) deci
 $DC=SB$;

$AB=AQ+QS+SB=3DC$

b)

AQ și DC paralele și congruente,

deci AQCD paralelogram.



2p

1p

1p

2p

1p