

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 02.02.2025 –

Clasa a VI-a

SUBIECTUL 1

Determinați numerele naturale nenule a și b , $a < b$, pentru care $[a, b] + (a, b) = 26$, unde $[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b , iar (a, b) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Soluție:

Fie $d \in \mathbb{N}^*$, $d = (a, b) \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N}^*$, $x < y$, $(x, y) = 1$ astfel încât $a = dx$, $b = dy$ 1p

Din $a \cdot b = [a, b] \cdot (a, b) \Rightarrow [a, b] = dxy$ 1p

$dxy + d = 26 \Rightarrow d(xy + 1) = 26 \Rightarrow d|26$ 1p

Dar $xy + 1 \geq 3 \Rightarrow d \in \{1, 2\}$ 1p

Pentru $d = 1 \Rightarrow xy = 25 \Rightarrow x = 1, y = 25 \Rightarrow a = 1, b = 25$ 1p

Pentru $d = 2 \Rightarrow xy = 12 \Rightarrow x = 1, y = 12 \Rightarrow a = 2, b = 24$ 1p

sau $x = 3, y = 4 \Rightarrow a = 6, b = 8$ 1p

SUBIECTUL 2

Se consideră unghiurile adiacente suplementare \widehat{AOB} și \widehat{BOC} , astfel încât $\widehat{AOB} = \frac{1}{5} \cdot \widehat{BOC}$. Fie OM bisectoarea unghiului \widehat{BOC} , OP semidreapta opusă lui OM iar OQ bisectoarea unghiului \widehat{AOP} .

3p a) Aflați măsurile unghiurilor \widehat{AOB} și \widehat{BOC} .

4p b) Demonstrați că unghiurile \widehat{QOM} și \widehat{QOC} sunt congruente.

Soluție:

a) $\widehat{BOC} = 5 \cdot \widehat{AOB}$, $\widehat{BOC} + \widehat{AOB} = 180^\circ$

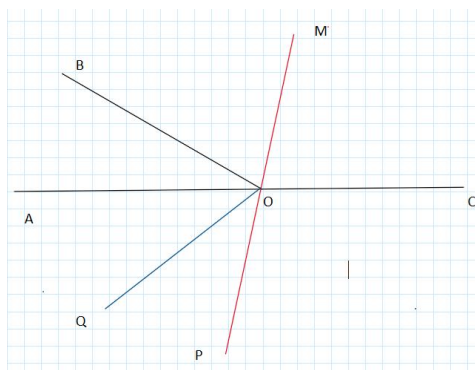
$\widehat{AOB} = 30^\circ$; $\widehat{BOC} = 150^\circ$

b) OM bisectoare implică $\widehat{MOC} = \widehat{MOB} = 75^\circ$

$\widehat{AOP} = 75^\circ$ (opus la vârf cu \widehat{MOC})

$\widehat{AOQ} = \widehat{QOP} = 37^\circ 30'$ și

$\widehat{MOQ} = \widehat{QOC} = 142^\circ 30'$, deci sunt congruente



2p

1p

1p

2p

1p

SUBIECTUL 3

În jurul punctului O considerăm unghiurile \widehat{AOB} , \widehat{BOC} , \widehat{COD} , \widehat{DOE} , \widehat{EOF} , \widehat{FOA} având măsurile b, c, d, e, f , respectiv a , exprimate în grade, cu a, b, c, d, e, f numere naturale nenule. Se știe că numerele a, b, c sunt direct proporționale cu 4, 5, 6, iar numerele c, d, e sunt invers proporționale cu 4, 5, 6. Determinați cea mai mică valoare posibilă a lui f .

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

Conform datelor din enunț se scriu relațiile :

$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$ și respectiv, $4c = 5d = 6e$ 1p

Exprimăm toate mărimile în funcție de c și obținem : $a = \frac{2c}{3}$, $b = \frac{5c}{6}$, $d = \frac{4c}{5}$, $e = \frac{2c}{3}$ 1p

Dar $a + b + c + d + e + f = 360^\circ \Rightarrow \frac{2c}{3} + \frac{5c}{6} + c + \frac{4c}{5} + \frac{2c}{3} + f = 360^\circ \Rightarrow \frac{119c}{30} + f = 360^\circ$ 2p

Cum $f \in \mathbb{N}$ și $360 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{119c}{30} \in \mathbb{N} \Rightarrow 30 | 119c$, $(30, 119) = 1 \Rightarrow 30 | c$ 1p

Valoarea minimă a lui f se obține pentru valoarea maximă a lui c . Cum $\frac{119c}{30} < 360^\circ$ și $30 | c$, se deduce că valoarea maximă a lui c este $90^\circ \Rightarrow$ valoarea minimă a lui f este egală cu 3° 2p

SUBIECTUL 4

Se consideră mulțimile $A = \{x = 45 \cdot a - 840, a \in \mathbb{N}, a \geq 19\}$

și $B = \{y = 1185 - 31 \cdot b, b \in \mathbb{N}, b \leq 38\}$. Determinați $A \cap B$.

Soluție:

Elementele comune au proprietatea că iau ambele forme, deci există a și b în condițiile date astfel încât $45 \cdot a - 840 = 1185 - 31 \cdot b$ 2p

Avem $45 \cdot a + 31 \cdot b = 2025$ 1p

deci b este multiplul lui 45 2p

$b = 0$ implică $a = 45$, deci $x = y = 1185$ 1p

$b = 45k, k \geq 1$ implică $b > 39$, deci nu convine; $A \cap B = \{1185\}$. 1p