

## Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

## Etapa Locală

Maramureș – 8 februarie 2025

Clasa a IX- a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

## Barem de corectare și notare

1. a. Se știe că  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  .....1p

Atunci  $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + 100^2}{3350} = \frac{\frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6}}{3350} = \frac{101 \cdot 3350}{3350} = 101 \Rightarrow [a] = 101$  .....2p

b. Deoarece  $\left\{ \frac{x}{2025} \right\} \in [0,1)$  și  $x = 2025 - \left\{ \frac{x}{2025} \right\} \Rightarrow x \in (2024, 2025]$  .....1p

Pentru  $x \in (2024, 2025) \Rightarrow 0 < \frac{x}{2025} < 1 \Rightarrow \left\{ \frac{x}{2025} \right\} = \frac{x}{2025}$  și ecuația devine

$x + \frac{x}{2025} = 2025 \Rightarrow x = \frac{2025^2}{2026}$  .....2p

Dacă  $x = 2025$ , atunci  $\left\{ \frac{x}{2025} \right\} = \{1\} = 0$  și deci  $x = 2025$  verifică ecuația, deci

$S = \left\{ \frac{2025^2}{2026}, 2025 \right\}$  .....1p

2. Numerele  $A, B, C$  sunt în progresie aritmetică  $\Leftrightarrow 2B = A + C$  .....1p

$\Leftrightarrow \frac{2b}{c+a} = \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} \Big| (c+a)(b+c)(a+b)$  .....1p

$\Leftrightarrow 2b(b+c)(a+b) = a(c+a)(a+b) + c(c+a)(b+c)$

$\Leftrightarrow 2b^2a + 2b^3 + 2abc + 2b^2c = a^2c + abc + a^3 + a^2b + c^2b + c^3 + abc + c^2a$

$\Leftrightarrow 2b^2(a+b+c) = a^2(a+b+c) + c^2(a+b+c) \Big| : (a+b+c) \neq 0$

$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$

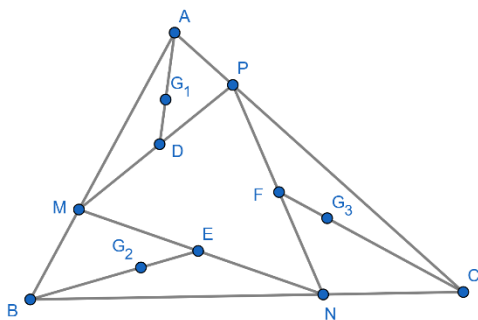
$\Leftrightarrow a^2, b^2, c^2$  formează o progresie aritmetică.....5p

3. a. Fie  $G_1$  și  $G_2$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABC$  respectiv

$MNP \Rightarrow \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{CG_1} = \vec{0}$  și  $\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{NG_2} + \overrightarrow{PG_2} = \vec{0}$

Dar  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2M} + \overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2N} + \overrightarrow{CG_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2P}$   
 $= 3\overrightarrow{G_1G_2}$

De unde rezultă concluzia.....3p



b. Fie  $D, E$  și  $F$  mijloacele segmentelor  $[MP], [MN]$  respectiv  $[NP]$ .

$$\text{Atunci } \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}}{3} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \text{ și } \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PA} \Rightarrow -3\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Atunci } \overrightarrow{AG_1} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{9} \text{ și analog se obține } \overrightarrow{BG_2} = \frac{2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{9}, \overrightarrow{CG_3} = \frac{2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{9} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dar } \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{9} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}{9} = \vec{0}$$

Aplicând a. avem că  $\triangle ABC$  și  $\triangle G_1G_2G_3$  au același centru de greutate.....1p

4. Notăm cu  $P(n): \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(1): \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq 2(A) \dots\dots\dots 2p$$

Presupunem că  $P(k)(A)$  și demonstrăm că  $P(k+1)(A)$

$$P(k): \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

$$P(k+1): \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

$$\text{Vom demonstra că } \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)\sqrt{3k+4} \leq \sqrt{3k+1}(2k+2) \Big|^2$$

$$\Leftrightarrow (4k^2 + 4k + 1)(3k + 4) \leq (3k + 1)(4k^2 + 8k + 4)$$

$$\Leftrightarrow 12k^3 + 12k^2 + 3k + 16k^2 + 16k + 4 \leq 12k^3 + 24k^2 + 12k + 4k^2 + 8k + 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k(A) \Rightarrow P(k+1)(A)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1)(A) \\ P(k) \Rightarrow P(k+1), \forall k \geq 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{M.I.M.} \\ \Rightarrow P(n)(A), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \dots\dots\dots 5p$$