

## Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapa locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a XI-a

Barem de notare și evaluare

**Problema 1.**

Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit astfel:  $a_1 = 1$  și  $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ .

a) Arătați că  $0 \leq a_n - \sqrt{n} \leq 1$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt[3]{n}}$ .

**Soluție:**

a) Vom folosi metoda inducției matematice. Relația  $0 \leq a_n - \sqrt{n} \leq 1$  este adevărată pentru  $n = 1$ . **(1p)**

Presupunem că relația este adevărată pentru un număr natural nenul  $k$ , fixat în mod arbitrar:  $\sqrt{k} \leq a_k \leq 1 + \sqrt{k}$ . Avem

$$a_{k+1} = 1 + \frac{k}{a_k} \geq 1 + \frac{k}{1 + \sqrt{k}} \geq 1 + \frac{k}{1 + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} \quad \text{și} \quad a_{k+1} = 1 + \frac{k}{a_k} \leq 1 + \frac{k}{\sqrt{k}} \leq 1 + \sqrt{k+1}, \quad \text{deci}$$

$\sqrt{k+1} \leq a_{k+1} \leq 1 + \sqrt{k+1}$ . De aici, rezultă că  $0 \leq a_n - \sqrt{n} \leq 1$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ . **(2p)**

b) Din relația demonstrată la punctul a), deducem că  $1 \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ . Prin urmare,

$$1 \leq \left( \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt[3]{n}} \leq \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt[3]{n}}, \text{ oricare ar fi } n \geq 1. \text{ (2p)}$$

Trecând la limită în ultima relație, obținem  $1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt[3]{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt[3]{n}} = e^0 = 1$ , deci

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt[3]{n}} = 1. \text{ (2p)}$$

**Problema 2.**

Fie  $X$  o matrice de ordinul doi, cu elemente numere reale, care satisface ecuația  $X^2 + X = 2I_2$ .

a) Demonstrați că, dacă toate elementele matricei  $X$  sunt numere naturale, atunci  $X = I_2$ .

b) Demonstrați că există o infinitate de matrice  $X$ , care au toate elementele numere întregi și care satisfac ecuația considerată.

**Soluție:**

a) Din relația Hamilton-Cayley, rezultă că  $X^2 - \text{Tr}(X)X + \det(X)I_2 = O_2$ , deci  $X^2 = \text{Tr}(X)X - \det(X)I_2 = -X + 2I_2$ , ceea ce implică  $(\text{Tr}(X) + 1)X = (\det(X) + 2)I_2$ . **(2p)**

Cum matricea  $X$  are toate elementele numere naturale, înseamnă că  $\text{Tr}(X) + 1 > 0$ , deci  $X = kI_2$ , unde  $k = (\det(X) + 2) : (\text{Tr}(X) + 1)$ . Înlocuind  $X = kI_2$  în ecuația din enunț, obținem  $(k^2 + k)I_2 = 2I_2$ , deci  $k = 1$  sau  $k = -2$ . Singura soluție, cu elementele numere naturale, este matricea  $X = I_2$ . **(2p)**

b) Căutăm acum matrice, cu elementele numere întregi, care să verifice condițiile din enunț. Pentru a găsi o infinitate de astfel de matrice, plecăm de la ecuația  $(\text{Tr}(X) + 1)X = (\det(X) + 2)I_2$  și urmărim varianta

$Tr(X) + 1 = \det(X) + 2 = 0$ . Dacă  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ , atunci condițiile anterioare devin  $a + d = -1$  și  $ad - bc = -2$ .

Înlocuim pe  $d = -1 - a$  în a doua egalitate și obținem  $a^2 + a + bc = 2$  sau  $-bc = (a - 1)(a + 2)$ . **(1p)**

Alegând, de exemplu,  $b = 1 - a$  și  $c = a + 2$  egalitatea este în mod evident validă. **(1p)**

Așadar,  $X = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a+2 & -1-a \end{pmatrix}$  este o soluție cu elementele numere întregi, pentru orice număr  $a \in \mathbb{Z}$ , ceea ce înseamnă că ecuația considerată are o infinitate de soluții în mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi cu elemente numere întregi. **(1p)**

### Problema 3.

Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin relațiile  $x_1 = 2$  și  $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ .

a) Demonstrați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător.

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

c) Demonstrați că  $x_n^2 = 1 + 3 \cdot 2^{2n-2} x_1^2 x_2^2 \cdots x_{n-1}^2$ , oricare ar fi  $n \geq 2$ .

d) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2^n x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$ .

#### Soluție:

a) Prin inducție, demonstrăm că  $x_n \geq 2$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ . **(1p)**

Astfel,  $x_{n+1} - x_n = 2x_n^2 - 1 - x_n = (2x_n + 1)(x_n - 1) > 0$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ , deci șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător. **(2p)**

b) Cum șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător, înseamnă că are o limită. **(1p)**

Dacă șirul ar avea o limită finită  $l$ , trecând la limită în relația de recurență din enunț,  $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ , obținem  $l = 2l^2 - 1$ , de unde rezultă că  $l = -0,5$  sau  $l = 1$ , ceea ce contrazice faptul că  $x_n \geq 2$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ . Prin urmare,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . **(1p)**

c) Avem  $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \Leftrightarrow x_{n+1} - 1 = 2(x_n - 1)(x_n + 1)$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ , de unde rezultă că

$$x_{n+1} - 1 = 2(x_n - 1)(x_n + 1),$$

$$x_n - 1 = 2(x_{n-1} - 1)(x_{n-1} + 1),$$

$$x_{n-1} - 1 = 2(x_{n-2} - 1)(x_{n-2} + 1),$$

...

$$x_2 - 1 = 2(x_1 - 1)(x_1 + 1).$$

Înmulțind aceste relații și efectuând simplificările, obținem  $x_{n+1} - 1 = 2^n (x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)$ , oricare ar fi  $n \geq 1$  sau  $2x_n^2 - 2 = 2^n (2 - 1)(2 + 1)(2x_1^2)(2x_2^2) \cdots (2x_{n-1}^2)$ , oricare ar fi  $n \geq 2$ , deci  $x_n^2 = 1 + 3 \cdot 2^{2n-2} x_1^2 x_2^2 \cdots x_{n-1}^2$ , oricare ar fi  $n \geq 2$ . **(1p)**

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{2^n x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{2^{2n} x_1^2 x_2^2 \cdots x_{n-1}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{2^2 (x_n^2 - 1) : 3} = \frac{3}{4}$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2^n x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . **(1p)**

**Problema 4.**

Fie  $A$  o matrice de ordin trei cu elemente numere întregi.

- a) Dacă matricea  $A$  este inversabilă și  $A^{-1}$  are toate elementele numere întregi, arătați că  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ .  
b) Demonstrați că, dacă  $A$  are toate elementele numere impare, atunci  $\det(2A)$  se divide cu 32.  
c) Demonstrați că  $\det(4A + 3A')$  se divide cu 7.

**Soluție:**

- a) Cum  $A$  și  $A^{-1}$  au toate elementele numere întregi,  $\det(A)$  și  $\det(A^{-1})$  sunt numere întregi. **(1p)**

Din relația  $AA^{-1} = I_3$ , rezultă că  $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ , deci  $\det(A) = -1$  sau  $\det(A) = 1$ . **(2p)**

- b) Dacă toate elementele matricei  $A$  sunt impare, atunci adunând prima sa linie la următoarele două linii, aceste ultime două linii se vor transforma în linii cu toate elementele pare, deci determinantul matricei astfel obținute, care este egal cu  $\det(A)$ , se divide cu 4. **(2p)**

Prin urmare,  $\det(2A) = 8\det(A)$  se divide cu 32. **(1p)**

- c) Avem  $\det(4A + 3A') = \det(7A + 3(A' - A)) = \det(7A + 3B)$ , unde  $B = A' - A$ . Cum  $\det(xA + yB) = x^3 \det(A) + ax^2y + bxy^2 + y^3 \det(B)$ , unde  $a, b \in \mathbb{Z}$ , oricare ar fi matricele pătratiche de ordin trei cu elemente întregi  $A, B$  și oricare ar fi numerele reale  $x, y$ . De aici, având în vedere că  $\det(B) = 0$  (căci  $\det(B) = \det(A' - A) = \det((A' - A)') = \det(A - A') = -\det(A' - A) = -\det(B)$ ), rezultă că  $\det(4A + 3A') = \det(7A + 3B) = 7^3 \cdot \det(A) + a \cdot 7^2 \cdot 3 + b \cdot 7 \cdot 3^2$ , deci  $\det(4A + 3A')$  se divide cu 7. **(1p)**