



Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapa locală – Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a V-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1

O școală plănuiește o excursie cu autocare. Dacă în fiecare autocar ar încăpea cu 8 copii mai mulți decât numărul de locuri, ar trebui un autocar mai puțin. Dacă în fiecare autocar ar fi cu 8 copii mai puțin decât numărul de locuri, ar mai trebui două autocare, din care unul ar avea doar două treimi din numărul de locuri ocupate. Câți copii pleacă în excursie și câte autocare sunt necesare, știind că fiecare autocar are același număr de locuri și că autocarele vor fi ocupate complet?

Soluție:

Fie x numărul locurilor din fiecare autocar și y numărul autocarelor. Numărul total de copii este xy1p

Se obține $xy = (x + 8)(y - 1)$ 1p

și $xy = (x - 8) \cdot (y + 1) + 2 \cdot (x - 8) : 3$ 1p

Din prima ecuație se obține $x = 8(y - 1)$ 1p

Se obține $y = 5$, $x = 32$ 2p

Astfel, numărul de copii este $xy = 160$ 1p

Problema 2

a) Determinați numărul de forma \overline{xyz} care este pătrat perfect, pentru care numărul \overline{zyx} este pătrat perfect.

b) Determinați numărul \overline{abc} știind că $\overline{abc} = (a + b^2 + c^3)^2$.

Soluție:

a) Verificând pătratele perfecte, obținem:

I. $\overline{xyz} = \overline{zyx} = 121 = 11^2$, II. $\overline{xyz} = \overline{zyx} = 484 = 22^2$, III. $\overline{xyz} = \overline{zyx} = 676 = 26^2$ 1p

IV. $\overline{xyz} = 144 = 12^2$ și $\overline{zyx} = 441 = 21^2$, V. $\overline{xyz} = 169 = 13^2$ și $\overline{zyx} = 961 = 31^2$ 1p

Numerele \overline{xyz} sunt 121, 144, 169, 441, 484, 676, 9611p

b) Cum \overline{abc} trebuie să fie pătrat perfect și $\overline{abc} \leq 961 = 31^2 \Rightarrow a + b^2 + c^3 \leq 31 \Rightarrow c \leq 3$ 1p

Dar c este ultima cifră a unui pătrat perfect și rămân posibilitățile $c = 0$ sau $c = 1$

Dacă $c = 0$, $\overline{ab0}$ este pătrat perfect, deci trebuie ca $b = 0$. Relația dată devine $\overline{a00} = (a + 0 + 0)^2$, imposibil.1p

Pentru $c = 1$, pătratele perfecte cu ultima cifră 1 sunt $11^2 = 121$, $19^2 = 361$, $21^2 = 441$, $29^2 = 841$, $31^2 = 961$.

Pentru 121 ar trebui să avem $121 = (1 + 2^2 + 1^3)^2$, fals. La fel se verifică și celelalte1p

Se obține soluția $\overline{abc} = 441 = (4 + 4^2 + 1^3)^2$ 1p

Problema 3

Fie numărul $S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{2024 \text{ ori}}$.

a) Aflați numărul cifrelor numărului S .

Etapa locală ONM - Iași, 31 ianuarie 2025

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași

Tel: +40 (0)232 26 80 14

Fax: +40 (0)232 26 77 05

www.isjiasi.ro



b) Fie A numărul format din primele 1012 cifre ale lui S și B numărul format prin ștergerea cifrelor numărului A de la începutul numărului S . Care din numerele A sau B este mai mare?

Soluție:

$$a) 9S = (10-1) + (100-1) + \dots + (10^{1024}-1) \Rightarrow 9S = \underbrace{111\dots1}_{2024 \text{ ori}} 10 - 2024.$$

$$\text{Se obține } 9S = \underbrace{111\dots1}_{2020 \text{ ori}} 109086 \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Astfel, } 9S > 10^{2024} > 9 \cdot 10^{2023} \Rightarrow S > 10^{2023} \text{ și } 9S < \underbrace{9000\dots0}_{2024 \text{ ori}} \Rightarrow S < 10^{2024} \dots \dots \dots 1p$$

deci S are 2024 cifre $\dots \dots \dots 1p$

$$b) 9S = \underbrace{111\dots1}_{9 \text{ ori}} \underbrace{111\dots1}_{9 \text{ ori}} \underbrace{1\dots1}_{9 \text{ ori}} 1111109086 \dots \dots \dots 1p$$

224 grupe

$$9S = \underbrace{111\dots1}_{9 \text{ ori}} \cdot (10^{2016} + 10^{2007} + \dots + 10^9) + 1111109086 \quad \text{și} \quad \text{se} \quad \text{obține}$$

$$S = 12345679 \cdot (10^{2016} + 10^{2007} + \dots + 10^9) + 12345454$$

$$\text{Astfel, } S = 123456790123456790\dots12345679012345454 \dots \dots \dots 1p$$

Cum S are 2·1012 cifre, a 1013-a cifră a lui S este prima cifră a lui B $\dots \dots \dots 1p$

Dar $1013 = 9 \cdot 112 + 5 \Rightarrow$ prima cifră a lui B este a 5-a cifră din grupul 123456790, iar cum A și B au același număr de cifre $\Rightarrow A < B$ $\dots \dots \dots 1p$

Problema 4

Produsul resturilor nenule rezultate din împărțirea la 5 a n numere naturale consecutive este $3^{1001} \cdot 4^{1501}$. Aflați toate valorile posibile pentru n .

Soluție:

Resturile împărțirii la 5 a cinci numere naturale consecutive sunt (în ordine): 0,1,2,3,4 sau 1,2,3,4,0 sau 2,3,4,0,1 sau 3,4,0,1,2 sau 4,0,1,2,3. Grupăm cele n numere naturale în grupe de 5 elemente, începând cu primul. Sunt k grupe și rămân cel mult 4 elemente negrupate. $\dots \dots \dots 1p$

Produsul resturilor nenule din fiecare grupă este $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2^3 \cdot 3$, deci produsul resturilor nenule din cele k grupe este $P = 2^{3k} \cdot 3^k$. $\dots \dots \dots 1p$

Comparând exponenții lui 3 obținem $k = 1001$ grupe a câte 5 elemente fiecare sau $k = 1000$ și cel mult 4 elemente negrupate. $\dots \dots \dots 1p$

Dacă $k = 1001 \Rightarrow P = 2^{3003} \cdot 3^{1001} = 3^{1001} \cdot 4^{1501}$, contradicție $\dots \dots \dots 1p$

Dacă $k = 1000 \Rightarrow P = 2^{3000} \cdot 3^{1000}$, se disting situațiile

Dacă avem două elemente negrupate, acestea vor da resturile 3 și 4 la împărțirea cu 5. Astfel, $n = 5 \cdot 1000 + 2 = 5002$, un exemplu fiind șirul 3, 4, 5, ..., 5004 $\dots \dots \dots 1p$

Dacă avem trei elemente negrupate, acestea vor da resturile 3, 4 și 0 la împărțirea cu 5. Astfel, $n = 5 \cdot 1000 + 3 = 5003$, un exemplu fiind șirul 3, 4, 5, ..., 5005 $\dots \dots \dots 1p$

Dacă avem patru elemente negrupate, acestea vor da resturile 3, 4, 0 și 1 la împărțirea cu 5. Astfel, $n = 5 \cdot 1000 + 4 = 5004$, un exemplu fiind șirul 3, 4, 5, ..., 5006 $\dots \dots \dots 1p$