



## Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapa locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a VIII –a

### Problema 1

Fie  $a, b, c, x$  numere reale cu  $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ , astfel încât:

$$a^2 \cdot \left( \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \right) = 2024, \quad b^2 \cdot \left( \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} \right) = -2025$$

și

$$c^2 \cdot \left( \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} \right) = x.$$

Aflați valoarea lui  $x$ .

(adaptare – supliment GM10/2024)

### Problema 2

a) Arătați că  $\sqrt{a+k} \leq \frac{a+k+1}{2}$ , pentru orice  $a \in (0; \infty)$  și orice  $k$  număr natural nenul.

b) Arătați că:

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} + \dots + \sqrt{a+2025} \leq \frac{2025(a+1014)}{2}, \text{ pentru orice } a \in (0; \infty).$$

### Problema 3

a) Numerele reale  $x_1, x_2, \dots, x_{2025}$  satisfac relația:

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_{2024} - x_{2025}| = |x_{2025} - x_1|.$$

Arătați că  $x_1 = x_2 = \dots = x_{2025}$ .

b) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$ , cu  $a < b$ , știind că în intervalul  $(a; b)$  se află cel puțin 7 numere întregi și are loc relația:

$$4a^2 + 4b^2 + 3a - 59b + 220 = |a - b + 6|.$$

### Problema 4

Fie tetraedrul regulat  $ABCD$  cu latura de  $6\sqrt{3}$  cm și punctele  $M, N, P, Q$  pe laturile  $AB, BC, CD$ , respectiv  $DA$ , astfel încât  $AM = BN = CP = DQ = 2\sqrt{3}$  cm.

a) Arătați că  $MN \parallel (AA'D)$ , unde  $A'$  este mijlocul laturii  $BC$ .

b) Arătați că  $MN = MQ = QP = PN$ .

c) Calculați distanța de la punctul  $Q$  la planul  $(MTP)$ , unde  $T$  este mijlocul segmentului  $NQ$ .

**Timp de lucru: 3 ore.**

**Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.**