



Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapa locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a IX-a

Problema 1.

a) Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ și $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $|ax - b| \leq c$, $|bx - c| \leq a$, $|cx - a| \leq b$. Demonstrați că $0 \leq x \leq 2$.

Supliment Gazeta Matematică

b) Ordonăți crescător numerele $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; $\frac{1}{4n}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2.

Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 2,5 \\ y + [z] + \{x\} = 8,2 \\ z + [x] + \{y\} = 1,3 \end{cases}$$
 unde $[t]$ este partea întreagă a numărului real t , iar

$\{p\}$ este partea fracționară a numărului real p .

a) Arătați că $x + y + z = 6$.

b) Rezolvați sistemul.

Problema 3.

a) Se consideră numerele reale pozitive a și b . Arătați că $\frac{a}{1+4b^2} \geq a - ab$.

b) Arătați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c cu suma $a + b + c = \frac{3}{2}$ are loc inegalitatea

$$\frac{a}{1+4b^2} + \frac{b}{1+4c^2} + \frac{c}{1+4a^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Problema 4.

Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Fie H și H_1 ortocentrele triunghiurilor ABD , respectiv ABC și G, G_1 centrele de greutate ale triunghiurilor HAD , respectiv H_1BC .

a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{GG_1}$ în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{DC} .

b) Dacă $AB \neq CD$ și $3GG_1 = AB + 2CD$, arătați că patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte