

A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025
Clasa a VIII-a

Problema 1. Determinați numerele reale a și b care verifică egalitatea

$$3a + 3b + 28 = 8\sqrt{3a + 5} + 6\sqrt{3b - 2}$$

și calculați $(a - b - 1)^{2024}$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră numerele

$$a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023} + \sqrt{2024}}$$

și

$$b = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2025}}$$

- a) Calculați media aritmetică a numerelor a și b .
- b) Demonstrați că $a > 22$.

Problema 3. Fie triunghiul ABC , unde $AB = 1$ cm, $AC = \sqrt{2}$ cm și $BC = \sqrt{3}$ cm. Pe planul triunghiului ABC din punctul C se ridică perpendiculara CM , $CM = \sqrt{3}$ cm.

- a) Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic!
- b) Demonstrați că BA este perpendicular pe planul (ACM) și calculați tangenta unghiului format de dreapta BM cu planul (ACM) !
- c) Fie $N \in AM$ astfel încât $MN = NB$. Calculați aria triunghiului MNB !

Problema 4. Prisma dreaptă regulată $ABCD A'B'C'D'$ are baza $ABCD$ pătrat, muchia bazei $AB = 4\sqrt{2}$ cm și muchia laterală $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Fie M și N mijloacele laturilor AB și BC , $AC \cap DB = \{O\}$.

- a) Arătați că $A'C' \parallel (D'MN)$!
- b) Calculați unghiul format de planurile $(D'MN)$ și (ABC) !
- c) Calculați distanța de la punctul D la planul $(D'MN)$!

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.