

A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică

Etapă zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XII-a

Soluții și bareme

Problema 1. Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$ notăm

$$x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y}.$$

- a) Arătați că funcția $(x, y) \rightarrow x * y$ definește o lege de compoziție pe M .
b) Demonstrați că legea de compoziție $*$ este comutativă, asociativă, dar nu are element neutru.

Supliment GM 9/2024

Soluție

- a) Arătăm că dacă $x, y \in M$, atunci $x * y \in M$. Din $x, y \in M \Rightarrow x < 1, y < 1 \Rightarrow 2025 - x - y > 0$.
 $x * y \in M \Leftrightarrow \frac{2024 - xy}{2025 - x - y} < 1$ înmulțind această relație cu $(2025 - x - y) > 0$ obținem $2024 - xy < 2025 - x - y \Leftrightarrow x + y - xy - 1 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(1 - y) < 0$ ceea ce este adevărat pentru că $x - 1 < 0$ și $1 - y > 0$ **2p**

- b) $x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y} = \frac{2024 - yx}{2025 - y - x} = y * x, \forall x, y \in M$ deci legea $*$ este comutativă. **1p**
Verificăm asociativitatea legii de compoziție, pentru care arătăm că $(x * y) * z = x * (y * z)$ pentru orice $x, y, z \in M$ **1p**

$$(x * y) * z = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y} * z = \frac{2024 - \frac{2024 - xy}{2025 - x - y} \cdot z}{2025 - \frac{2024 - xy}{2025 - x - y} - z} = \frac{2024 \cdot 2025 - 2024(x + y + z) + xyz}{2025^2 - 2024 - 2025(x + y + z) + (xy + xz + yz)} \stackrel{not.}{=} f(x, y, z) \dots \mathbf{1p}$$

Se observă că f este simetrică deci $f(y, z, x) = f(x, y, z)$ pentru orice $x, y, z \in M$. $x * (y * z) \stackrel{com.}{=} (y * z) * x \stackrel{def.}{=} f(y, z, x) \stackrel{sim.}{=} f(x, y, z) = (x * y) * z, \forall x, y, z \in M$ deci legea este asociativă. **1p**

Dacă legea ar avea element neutru, atunci ar exista $e \in M$ astfel încât $e * x = x$ pentru orice $x \in M$, adică $\frac{2024 - ex}{2025 - e - x} = x$ pentru orice $x \in M$, deci $2024 - ex = 2025x - ex - x^2, \forall x \in M \Leftrightarrow x^2 - 2025x + 2024 = 0, \forall x \in M$ ceea ce nu este adevărat, pentru că $x^2 - 2025x + 2024 = 0$ numai pentru $x = 2024$ și $x = 1$. Deci operația nu are element neutru. **1p**

Problema 2. Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

a)

$$\int \frac{2x^2 + 3e^x - 1}{x^2 + e^x - x} dx, \quad x \in \mathbb{R};$$

b)

$$\int \frac{\sin x}{27 \sin x + 36 \cos x} dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluție

a) Notăm $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + e^x - x$. Demonstrăm prima dată că $e^x - x > 0$ pentru oricare $x \in \mathbb{R}$, așadar deducem că $u(x) > 0$ pentru oricare $x \in \mathbb{R}$ **1p**

$$\int \frac{2x^2 + 3e^x - 1}{x^2 + e^x - x} dx = \int \frac{2u(x) + u'(x)}{u(x)} dx = 2x + \ln(u(x)) = 2x + \ln|x^2 + e^x - x| + C = 2x + \ln(x^2 + e^x - x) + C. \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

b) Fie: $I = \int \frac{\sin x}{27 \sin x + 36 \cos x} dx$, $J = \int \frac{\cos x}{27 \sin x + 36 \cos x} dx$ **1p**

$$27I + 36J = \int \frac{27 \sin x + 36 \cos x}{27 \sin x + 36 \cos x} dx = \int dx = x + C \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$27J - 36I = \int \frac{27 \cos x - 36 \sin x}{27 \sin x + 36 \cos x} dx = \ln|27 \sin x + 36 \cos x| + C = \ln(27 \sin x + 36 \cos x) + C \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{de unde } I = \frac{27x - 36 \ln(27 \sin x + 36 \cos x)}{2025} + C \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Problema 3. Fie (G, \cdot) un grup finit și $g \in G$ astfel încât $\text{ord}(g) = 6$. Să se arate că există și sunt unice $a, b \in G$ astfel încât $\text{ord}(a) = 2$, $\text{ord}(b) = 3$ și $a \cdot b = b \cdot a = g$. (Cu $\text{ord}(x)$ am notat ordinul elementului x .)

Soluție Din $\text{ord}(g) = 6 \Rightarrow g^6 = e$ și $g^k \neq e, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Fie $a = g^3$ și $b = g^2$, atunci $a^2 = (g^3)^2 = g^6 = e$ și $b^3 = (g^2)^3 = g^6 = e$ **2p**

Din $a^2 = e$ rezultă că $\text{ord}(a) | 2$, și cum $a = g^3 \neq e$ rezultă că $\text{ord}(a) = 2$. Analog din $b^3 = e$ rezultă că $\text{ord}(b) | 3$, și cum $b = g^2 \neq e$ rezultă că $\text{ord}(b) = 3$, deci am arătat existența. **2p**

În continuare demonstrăm unicitatea lui a și b .

Presupunem că ar exista $a_1, b_1 \in G$ astfel încât $g = a_1 b_1 = b_1 a_1$ și $\text{ord}(a_1) = 2$, $\text{ord}(b_1) = 3$ **1p**

Atunci $g^3 = (a_1 b_1)^3 = a_1 b_1 a_1 b_1 a_1 b_1 = a_1 a_1 b_1 b_1 b_1 = a_1 a_1^2 b_1^3 = a_1 e e = a_1$. Pe de altă parte $g^3 = a$ deci $a = a_1$. Analog se arată că $b = b_1$ **2p**

Problema 4. Fie $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Să se determine funcția f , știind că satisface următoarele condiții:

(1) $2x^3 F(x) + x^2 f(x) = e^{x^2} \cdot (4x^2 - 1), \forall x \in (0, +\infty);$

(2) $f(1) = e - \frac{2}{e}.$

Soluție Înmulțind relația (1) cu $\frac{e^{x^2}}{x^2}$ obținem $2x \cdot e^{x^2} F(x) + e^{x^2} f(x) = -\frac{1}{x^2} e^{2x^2} + 4e^{2x^2}, \forall x \in (0, +\infty)$ adică $\left(e^{x^2} F(x)\right)' = \left(\frac{1}{x} e^{2x^2}\right)', \forall x \in (0, +\infty)$ **3p**

de unde rezultă că $e^{x^2} F(x) = \frac{1}{x} e^{2x^2} + c, \forall x \in (0, +\infty)$ adică $F(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{x^2} + c \cdot e^{-x^2}, x \in (0, +\infty)$... **1p**

F fiind primitivă a lui f rezultă că $f(x) = F'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{x^2} + 2 \cdot e^{x^2} - 2cx e^{-x^2}, x \in (0, +\infty)$ **1p**

Din $f(1) = e - \frac{2}{e}$ rezultă că $-e + 2e - \frac{2c}{e} = e - \frac{2}{e}$ adică $c = 1$ **1p**

Deci funcția căutată este: $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2} \cdot \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) - e^{-x^2} \cdot 2x$ **1p**