

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 8.02.2025

Clasa a V-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a). Calculați numerele $a = 2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{56}) + 1$; $b = 2025^8 : (25^7 \cdot 3^{25}) \cdot (5^{2^2})^7$;
 $c = 2^{78} - 2^{77} - 2^{76}$ și apoi ordonați-le crescător.

b). Se consideră numărul $A = 2^{2025 \cdot n} \cdot 5^{2025 \cdot n + 50} \cdot b \cdot c - 6$, unde b și c sunt numerele determinate la subpunctul a) al problemei și n este un număr natural nenul. Aflați n , știind că suma cifrelor numărului A este 55366.

Soluție

$$a). a = 2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{56}) + 1 = 2 \cdot (3^{57} - 1) : 2 + 1 = 3^{57} \dots\dots\dots 1p$$

$$b = 2025^8 : (25^7 \cdot 3^{25}) \cdot (5^{2^2})^7 = 5^{16} \cdot 3^{32} : (5^{14} \cdot 3^{32}) \cdot 5^{28} = 5^2 \cdot 5^{28} = 5^{30} \dots\dots\dots 1p$$

$$c = 2^{78} - 2^{77} - 2^{76} = 2^{76} \cdot (2^2 - 2 - 1) = 2^{76} \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 3^{57} = (3^3)^{19} = 27^{19} ; \quad c = 2^{76} = (2^4)^{19} = 16^{19} \Rightarrow c < a \dots\dots\dots 1p$$

$$b = 5^{30} = (5^2)^{15} = 25^{15} ; \quad c = 2^{76} = 2 \cdot (2^5)^{15} = 2 \cdot 32^{15} \Rightarrow b < c$$

Deci, $b < c < a \dots\dots\dots 1p$

$$b). A = 2^{2025 \cdot n} \cdot 5^{2025 \cdot n + 50} \cdot 5^{30} \cdot 2^{76} - 6 = 2^{2025 \cdot n + 76} \cdot 5^{2025 \cdot n + 76} \cdot 5^4 - 6 = 10^{2025 \cdot n + 76} \cdot 625 - 6$$

$$A = 625 \underbrace{000\dots 0}_{de(2025n+76)ori_0} - 6 = 624 \underbrace{999\dots 9}_{de(2025n+75)ori_9} 4 \dots\dots\dots 1p$$

Suma cifrelor lui A este $6 + 2 + 4 + 9 \cdot (2025n + 75) + 4 = 691 + 9 \cdot 2025 \cdot n$

$$691 + 9 \cdot 2025 \cdot n = 55366 \Rightarrow n = 3 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 2

Se consideră șirul de numere 3, 7, 11, 15, 19, 23,...

a). Se pot alege 31 de numere din șir astfel încât suma lor să fie 2025? Justificare

b). Arătați că oricum am alege 2025 numere din șir suma lor nu poate fi egală cu 2025^{2025} .

Soluție

a) orice număr din șir este de forma $4k + 3$, unde k e număr natural.....1p

$$4(k_1 + k_2 + \dots + k_{31}) + 3 \cdot 31 = 2025 \Rightarrow k_1 + k_2 + \dots + k_{31} = 483 \dots\dots\dots 1p$$

$0 + 1 + 2 + \dots + 30 = 465 < 483$, deci se pot alege

(Exemplu: $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 2, \dots, k_{29} = 28, k_{30} = 29, k_{31} = 48 \Rightarrow$ numerele 3,7,11,...,119,195)1p

$$b) 4 \cdot (k_1 + k_2 + \dots + k_{2025}) + 3 \cdot 2025 = 2025^{2025} \dots\dots\dots 1p$$

$$2025^{2025} = (45^2)^{2025} = (45^{2025})^2 \text{ pătrat perfect impar} \Rightarrow$$

restul împărțirii lui 2025^{2025} la 4 poate fi doar 1.....2p

restul împărțirii unui număr de forma $4n + 7075$ la 4 este 3, deci nu poate avea loc egalitatea.....1p

SUBIECTUL 3

Determinați numerele naturale de forma \overline{abcd} , știind că \overline{ab} împărțit la \overline{cd} dă restul 31, iar \overline{cd} împărțit la \overline{ab} dă restul 2.

G.M. Nr. 9/2024

Soluție

$$\overline{ab} = \overline{cd} \cdot x + 31, \overline{cd} > 31; \quad \overline{cd} = \overline{ab} \cdot y + 2, \overline{ab} > 2 \dots\dots\dots 1p$$

Înlocuindu-l pe \overline{ab} în a 2-a relație, obținem: $\overline{cd} = (\overline{cd} \cdot x + 31) \cdot y + 2 \Leftrightarrow \overline{cd} = \overline{cd} \cdot x \cdot y + 31 \cdot y + 2$ (1)

Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci relația (1) nu este adevărată.....2p

Dacă $y = 0 \Rightarrow \overline{cd} = 2$, dar $\overline{cd} > 31 \Rightarrow y = 0$ nu convine.....1p

Dacă $x = 0 \Rightarrow \overline{cd} = 31 \cdot y + 2$ și $\overline{ab} = 31$

-dacă $y = 1 \Rightarrow \overline{cd} = 31 \cdot 1 + 2 = 33 \Rightarrow \overline{abcd} = 3133$;

-dacă $y = 2 \Rightarrow \overline{cd} = 31 \cdot 2 + 2 = 64 \Rightarrow \overline{abcd} = 3164$;

-dacă $y = 3 \Rightarrow \overline{cd} = 31 \cdot 3 + 2 = 95 \Rightarrow \overline{abcd} = 3195$

- dacă $y \geq 4 \Rightarrow \overline{cd} \neq$ număr de două cifre.....3p

SUBIECTUL 4

La un concurs au participat 3 elevi, fiecare dintre aceștia trebuind să răspundă la aceleași 10 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect, un elev primește 10 puncte și pentru fiecare răspuns greșit i se scad 5 puncte. Concurenții răspund la toate întrebările și obțin în total 240 de puncte. Dacă numărul de răspunsuri corecte ale celui de-al doilea elev este cu trei mai mare decât numărul de răspunsuri corecte ale primului elev, aflați la câte întrebări a răspuns corect fiecare elev.

Soluție

Presupunem prin absurd că al doilea elev nu a răspuns corect la toate întrebările, deci primul a răspuns corect la cel mult 6 întrebări.....2p

Punctajul maxim obținut de primul elev este $6 \cdot 10 - 4 \cdot 5 = 40$ puncte, al doilea elev a obținut maxim $9 \cdot 10 - 4 \cdot 5 = 85$ puncte, iar al treilea maxim $10 \cdot 10 = 100$ puncte.

În total $40 + 85 + 100 = 225$ puncte, $225 < 240 \Rightarrow$ contradicție3p

Deci, al doilea elev a răspuns corect la toate întrebările și a obținut 100 puncte, al doilea a răspuns corect la 7 întrebări și a obținut $7 \cdot 10 - 3 \cdot 5 = 55$ puncte, iar al treilea obține 85 puncte1p

$9 \cdot 10 - 1 \cdot 5 = 85$, deci al treilea elev a răspuns corect la 9 întrebări1p

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .