

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 08.02.2025
Clasa a IX-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ și $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|ax - b| \leq c, |bx - c| \leq a \text{ și } |cx - a| \leq b.$$

Demonstrați că $0 \leq x \leq 2$.

Supliment Gazeta Matematică, nr. 9/2024

Soluție

$$\left. \begin{array}{l} -c \leq ax - b \leq c \\ -a \leq bx - c \leq a \\ -b \leq cx - a \leq b \end{array} \right\} \dots\dots\dots 2p$$

$$-(a+b+c) \leq (a+b+c)x - (a+b+c) \leq (a+b+c) \dots\dots\dots 3p$$

$$0 \leq (a+b+c)x \leq 2(a+b+c) \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 2

Determinați numărul real x care satisface proprietatea $\left[\frac{3x-3}{2} \right] = \left[\frac{3x-1}{6} \right] + \left[\frac{3x+1}{6} \right] + \frac{2x+1}{3}$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

Vladimir Vîntu

Soluție

$$\text{Folosim } [3a] = [a] + \left[a + \frac{1}{3} \right] + \left[a + \frac{2}{3} \right]$$

$$\left[3 \cdot \frac{3x-3}{6} \right] = \left[\frac{3x-3}{6} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{3x-3}{6} + \frac{2}{3} \right] + \frac{2x+1}{3} \Leftrightarrow \left[\frac{3x-3}{6} \right] = \frac{2x+1}{3} \Leftrightarrow \left[\frac{x-1}{2} \right] = \frac{2x+1}{3} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Notăm } \left[\frac{x-1}{2} \right] = n, n \in \mathbb{Z}. \text{ Rezultă } x = \frac{3n-1}{2} \text{ și } n \leq \frac{x-1}{2} < n+1 \Leftrightarrow 2n \leq \frac{3n-1}{2} - 1 < 2n+2$$

$$-7 < n \leq -3 \Rightarrow n \in \{-6, -5, -4, -3\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{-19}{2}, -8, \frac{-13}{2}, -5 \right\} \dots\dots\dots 4p$$

SUBIECTUL 3

Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ astfel încât $ab+bc+ca=1$. Să se arate că $\frac{1+a^2}{1+bc} + \frac{1+b^2}{1+ac} + \frac{1+c^2}{1+ab} \geq 3$

Soluție

$$\frac{1+a^2}{1+bc} + \frac{1+b^2}{1+ac} + \frac{1+c^2}{1+ab} = \left(\frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+ba} \right) + \left(\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ba} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+ba} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} = \frac{9}{4} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ba} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{4} = \frac{3}{4} \dots\dots\dots 3p$$

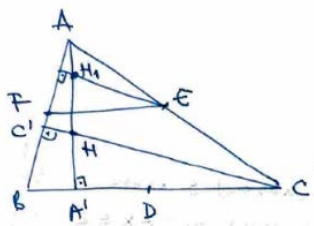
$$\text{Deci } \frac{1+a^2}{1+bc} + \frac{1+b^2}{1+ac} + \frac{1+c^2}{1+ab} \geq \frac{12}{4} = 3 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4

Fie triunghiul ABC și D, E, F mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB . Notăm H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor AFE, BDF respectiv CDE și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Să se arate că dacă O este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

Cătălin Zîrnă

Soluție



$$\left. \begin{array}{l} EH_1 \perp AB \\ CH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow EH_1 \parallel CH$$

Cum $AE = EC \Rightarrow H_1$ este mijlocul segmentului AH2p

Analog H_2 este mijlocul segmentului BH , H_3 este mijlocul segmentului CH1p

$$\vec{O} = \vec{OH_1} + \vec{OH_2} + \vec{OH_3} = \frac{\vec{OA} + \vec{OH}}{2} + \frac{\vec{OB} + \vec{OH}}{2} + \frac{\vec{OC} + \vec{OH}}{2} =$$

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + 3\vec{OH}}{2} = \frac{4\vec{OH}}{2} = 2\vec{OH} \text{ deci } O = H \Rightarrow \Delta ABC \text{ echilateral.....4p}$$

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .