

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 08.02.2025
Clasa a XI-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\det(A + x \cdot I_3) = 0$.
b) Demonstrați că $\det(A + I_3) \cdot \det(A + 2I_3) \cdot \det(A + 3I_3) \cdot \dots \cdot \det(A + 2024I_3)$ este divizibil cu 2025! (S-a notat cu $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

Soluție

- a) $\det(A + xI_3) = (x^2 - 2)(x + 2)$; rădăcinile ecuației aparțin $\{\pm\sqrt{2}, -2\}$ 3p
b) produsul $\prod_{k=1}^{2024} (k^2 - 2)(k + 2) = 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2026 \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^{2024} (k^2 - 2)}_{m \in \mathbb{Z}} = 2025! \cdot 1013 \cdot m : 2025!$ 4p

SUBIECTUL 2

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care $A(A + B)B = B(A + B)A$.

- a) Dacă $\text{Tr}(A + B) \neq 0$, arătați că $AB = BA$.
b) Rămâne valabilă concluzia de la a) dacă $\text{Tr}(A + B) = 0$?

Gazeta Matematică, nr. 10/2024

Soluție

- a) $A(A + B)B = B(A + B)A \Leftrightarrow A^2B - BA^2 = B^2A - AB^2$
 $A^2 - (\text{Tr}A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2B - BA^2 = (\text{Tr}A) \cdot (AB - BA)$
 $B^2 - (\text{Tr}B) \cdot B + (\det B) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow B^2A - AB^2 = (\text{Tr}B) \cdot (BA - AB)$
Deci $(\text{Tr}A) \cdot (AB - BA) = -(\text{Tr}B) \cdot (BA - AB) \Rightarrow (\text{Tr}A + \text{Tr}B) \cdot (BA - AB) = O_2$
 $\text{Tr}(A + B) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Tr}A + \text{Tr}B \neq 0 \Rightarrow AB - BA = O_2 \Rightarrow AB = BA$ 5p
b) NU! De exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2p

SUBIECTUL 3

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x_n \leq x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

- a) dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior, atunci $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent;
b) dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este mărginit superior, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Nelu Chichirim

Soluție

$$x_n \leq x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, \quad a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \text{ rezultă } x_n + a_n \leq x_{n+1} + a_{n+1}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}$$

$$y_n = x_n + a_n \Rightarrow (y_n)_n \text{ crescător} \dots \dots \dots 2p$$

a) Cum $(a_n)_n$ convergent (monoton și mărginit) $\Rightarrow (y_n)_n$ convergent $\Rightarrow (x_n)_n$ convergent.....2p

b) $(y_n)_n$ crescător $\Rightarrow (y_n)_n$ are limită reală sau are limita $+\infty$

Presupunem că $y_n \rightarrow L \in \mathbb{R} \Rightarrow (y_n)_n$ convergent $\Rightarrow (x_n)_n$ convergent $\Rightarrow (x_n)_n$ mărginit, contradicție $\Rightarrow y_n \rightarrow +\infty$

Cum $(a_n)_n$ convergent $\Rightarrow x_n \rightarrow +\infty$ 3p

SUBIECTUL 4

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit astfel: $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \frac{1+n \cdot a_n^2}{n \cdot a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$.

b) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} = \frac{1}{2}$.

Cătălin Zîrnă

Soluție

a) Prin inducție avem $a_n > 0$, $(\forall) n \geq 1$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{na_n} > 0, (\forall) n \geq 1 \Rightarrow (a_n)_n \text{ strict crescător}$$

Presupunem că $(a_n)_n$ mărginit superior $\Rightarrow (\exists) M > 0$ astfel încât $a_n < M$, $(\forall) n \geq 1 \Rightarrow$

$$a_{n+1} - a_n > \frac{1}{M \cdot n}, (\forall) n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n > \frac{1}{M} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \rightarrow +\infty \text{ contradicție, deci } (a_n)_n \text{ crescător și}$$

nemărginit superior $\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$ 4p

$$\frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{\frac{a_n^2}{\ln n}} \text{ și aplicăm teorema Stolz-Casaro } \Rightarrow \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{na_n} \cdot \left(2a_n + \frac{1}{na_n} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{na_n^2} \right) = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2} \text{1p}$$

$$\text{b) } \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2}}{\ln n} \text{ și se arată că } \frac{n}{\ln n} \rightarrow +\infty, \text{ strict crescător și aplicăm teorema Stolz-Casaro}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}^2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{a_{n+1}^2} \cdot \frac{1}{\ln(n+1)}}{(n+1)\ln n - n\ln(n+1)} \cdot \ln n \cdot \ln(n+1) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln n} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2} \text{2p}$$

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător.