

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 08.02.2025

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Fie mulțimea $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ și \cdot operația de înmulțire a numerelor complexe.

- Arătați că $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$ este monoid comutativ.
- Determinați elementele simetrizabile ale acestui monoid.

Supliment Gazeta Matematică, nr. 9/2024

Soluție

- arată că este monoid.....4p
- determină elementele simetrizabile.....3p

SUBIECTUL 2

Se consideră un grup (G, \cdot) cu proprietatea că ordinul oricărui element din $G \setminus \{e\}$ este numărul natural $p \geq 2$.

- Să se arate că dacă $a, b \in G$ și $ab = ba$, atunci $a^n b^m = b^m a^n$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}^*$.
- Să se arate că p este număr prim.
- Să se arate că dacă $x, y \in G \setminus \{e\}$ pentru care există $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i < p$, $j < p$ cu $x^i y^j = y^j x^i$, atunci $xy = yx$.

Cristina Homencovschi

Soluție

- demonstrează relația.....2p
- presupunem că p nu este prim $\Rightarrow p = a \cdot b$, cu $a, b \geq 2$

Fie $x \in G \setminus \{e\} \Rightarrow x^p = e \Rightarrow (x^a)^b = e$. Cum $a < p \Rightarrow x^a \neq e$, dar $b < p$ și $(x^a)^b = e$ contradicție

$\Rightarrow p$ este prim2p

- $(i, p) = 1 \Rightarrow (\exists) a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ia + bp = 1$ și $(j, p) = 1 \Rightarrow (\exists) c, d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ic + dp = 1$

$x \cdot y = x^1 \cdot y^1 = x^{ia+bp} \cdot y^{jc+dp} = (x^i)^a \cdot (y^j)^c = (y^j)^c \cdot (x^i)^a = y^{jc} \cdot x^{ia} = y^{jc+dp} \cdot x^{ia+bp} = y \cdot x$ 3p

SUBIECTUL 3

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

- Să se arate că f este continuă pe \mathbb{R} .

- Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

Soluție

- $\{x\} = x - [x]$ și dacă $[x] = n$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \leq x < n+1$

pe $[n, n+1)$, $f(x) = \sqrt{(x-n)(1-x+n)}$, $(\forall) n \in \mathbb{Z}$ și se arată că

$f(n-0) = f(n+0) = f(n) = 0$, $(\forall) n \in \mathbb{Z}$, dar cum f continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow f$ continuă pe \mathbb{R} 2p

$$\text{b) } x \in (0,1) \int f(x) dx = \int \sqrt{x-x^2} dx = \frac{2x-1}{4} \cdot \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8} \arcsin(2x-1) + C$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{4} \cdot \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8} \arcsin(2x-1), & x \in (0,1) \\ a, & x=0 \\ b, & x=1 \end{cases}, \text{ deci } a = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{-\pi}{2} \right) = \frac{-\pi}{16}, b = \frac{\pi}{16}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = b - a = \frac{\pi}{8} \dots\dots\dots 3p$$

Obs. f continuă $\Rightarrow f$ admite primitive și este integrabilă, dar pe $[0,1]$ nu este derivabilă, deci nu putem aplica metoda itegrării prin părți !

$$\text{c) Cum } f(x+1) = f(x), (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \dots + \int_{[x]-1}^{[x]} f(t) dt + \int_{[x]}^x f(t) dt =$$

$$= [x] \cdot \int_0^1 f(t) dt + \int_{[x]}^x f(t) dt = \frac{\pi}{8} \cdot [x] + \int_{[x]}^x f(t) dt$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{8} x - \frac{\pi}{8} \{x\} + \int_{[x]}^x f(t) dt}{x} = \frac{\pi}{8} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\{x\}}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \int_{[x]}^x f(t) dt = \frac{\pi}{8} - 0 + 0 = \frac{\pi}{8} \dots\dots\dots 2p$$

$$\left(\{x\} \in [0,1) \text{ si } \int_{[x]}^x f(t) dt \in \left(0, \frac{\pi}{8} \right] \right)$$

SUBIECTUL 4

Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe $(0, 1)$ și cu f' mărginită pe $(0, 1)$.

$$\text{Notăm } I_n = \int_0^1 f(x^n) dx, J_n = \int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Arătați că există $M > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [0, 1]$.

b) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = f(0)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = f(1)$.

Nelu Chichirim

Soluție

a) f' mărginită $\Rightarrow (\exists) M > 0$ astfel incat $|f'(x)| \leq M, (\forall) x \in (0,1)$

Dacă $x, y \in [0,1], x > y$, folosind teorema lui Lagrange

$$\Rightarrow (\exists) c \in (y, x) \text{ a.i. } f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)| \leq M \cdot |x - y| \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{b) } |I_n - f(0)| = \left| \int_0^1 f(x^n) dx - \int_0^1 f(0) dx \right| = \left| \int_0^1 (f(x^n) - f(0)) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x^n) - f(0)| dx \leq \int_0^1 M \cdot |x^n - 0| dx$$

$$= M \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow I_n \rightarrow f(0) \dots\dots\dots 2p$$

$$|J_n - f(1)| = \left| \int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx - \int_0^1 f(1) dx \right| = \int_0^1 |f(\sqrt[n]{x}) - f(1)| dx \leq \int_0^1 M \cdot |\sqrt[n]{x} - 1| dx \leq \int_0^1 M \cdot (1 - \sqrt[n]{x}) dx =$$

$$= M \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \right) \rightarrow 0 \Rightarrow J_n \rightarrow f(1) \dots\dots\dots 2p$$

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .